MATEMATICA II

28 aprile 2005

Cognome, nome, numero di matricola e anno di corso:

1. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{x_1^3 - x_1 x_2^4}.$$

(i) Posto $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$, si calcolino, giustificandone preliminarmente l'esistenza, $\nabla(\phi \circ f)(\mathbf{x})$ e $D_{\mathbf{v}}(\phi \circ f)(2,1)$, dove $\mathbf{v}$ è la direzione individuata dal vettore $(-20, 99)$.

(ii) Si scriva la formula di Mc Laurin di f, arrestata al secondo ordine, con resto in forma di Peano.

(iii) Si determinino eventuali estremi di f nel suo dominio di definizione.

2. Si determinino gli estremi vincolati all'insieme $B(\mathbf{0}, 1)$ della funzione $f(x_1, x_2) = \log(1 + x_1^4 + x_2^4)$.

3. Si stabilisca per quali valori di $a \in \mathbf{R}$ la funzione

$$F_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{s^2 + \frac{1}{4}} \; \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2})}(t) + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},2)}(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \mathbf{1}_{[2^n,+\infty)}(t)$$

è funzione di ripartizione di una variabile aleatoria X. Per tali valori di a si discuta l'esistenza dei momenti di X e si calcoli la media di X, nel caso essa esista.

4. a. Si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2} \, \frac{1}{1 + x_3^2} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3.$$

Può essere utile trasformare l'integrale mediante coordinate cilindriche.

b. Si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathbf{R}^3} \mathrm{e}^{-(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3)} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3.$$