MATEMATICA II

22 febbraio 2005

Cognome, nome, numero di matricola e anno di corso:

1. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{-x_1^2+6x_1x_2-9x_2^2-4x_1x_3+12x_2x_3-4x_3^2}.$$

(i) Posto $\phi(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, si calcolino $\nabla(\phi \circ f)(\mathbf{x})$ e $D_{\mathbf{v}}(\phi \circ f)(1,0,0)$, dove $\mathbf{v}$ è la direzione individuata dal vettore $(-8,0,15)$, giustificandone preliminarmente l'esistenza.

(ii) Si scriva la formula di Mc Laurin di f, arrestata al secondo ordine, con resto in forma di Peano.

(iii) Si determinino eventuali estremi di f nel suo dominio di definizione.

2. Si determinino gli estremi vincolati all'insieme $S = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : \ x_1x_2 \leq -2\} \cap B(\mathbf{0}, \sqrt{5})$ della funzione $f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| + 1$.

3. Si stabilisca per quali valori di $a \in \mathbf{R}$ la funzione

$$F_a(t) = \frac{t}{4(1+t)} \mathbf{1}_{[0,2)}(t) + 3 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \mathbf{1}_{[2^n,+\infty)}(t)$$

è funzione di ripartizione di una variabile aleatoria X. Per tali valori di a si discuta l'esistenza dei momenti di X e si calcoli la media di X, nel caso essa esista.

4. a. Si consideri il sottoinsieme Ω di $\mathbf{R}^2$ definito da:

$$\Omega = \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_2| \leq \mathrm{e}^{-x_1}, \ x_1 \geq 0\Big\}.$$

(i) Si disegni Ω.

(ii) Si calcoli l'integrale $\int_\Omega \dfrac{1}{(2+\mathrm{e}^{x_1}+x_2)^2} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2$.

b. Si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{1+(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3.$$