MATEMATICA II

7 febbraio 2005

Cognome, nome, numero di matricola e anno di corso:

1. Si consideri la funzione $f : (0,+\infty) \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\log^2 x_1 - 1}{\mathrm{e}^{x_2^2} + 1}.$$

(i) Si calcoli la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(\mathrm{e}, 0)$, dove $\mathbf{v}$ è la direzione individuata dal vettore $(9, 40)$, e l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(\mathrm{e}^2, 0, \frac{3}{2})$.
(ii) Si scriva la formula di Taylor di f centrata in $(\mathrm{e}, 0)$, arrestata al secondo ordine, con resto in forma di Peano.
(iii) Si determinino gli eventuali estremi di f nel suo dominio di definizione.
(iv) Dette $\varphi(t) = \int_1^t \mathrm{e}^{s^2}\,\mathrm{d}s$ e $g(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{x}|^2}{1+|\mathbf{x}|^2}$, si calcolino $\nabla(\varphi \circ f)(\mathbf{x})$ e $\nabla(fg)(\mathbf{x})$.

2. Si determinino gli estremi vincolati all'insieme $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : |\mathbf{x}|^2 = 1\}$ della funzione $f(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2}$. (Suggerimento: si sfrutti la monotonia della funzione esponenziale).

3. Date le funzioni

$$F(x) = \left\lfloor \frac{x^3+1}{3} \right\rfloor + \int_{\frac{1}{x}}^{1} \mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t, \qquad f(x) = x^3,$$

si stabilisca se è $f \in \mathcal{RS}_F([1,3])$ e, in caso affermativo, si calcoli $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}F(x)$.

4. a. Si consideri il sottoinsieme Ω di $\mathbf{R}^3$ definito da:

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_3 \geq (x_1^2 + x_2^2)^{1/3}\right\}.$$

(i) Si disegni Ω.
(ii) Si calcoli l'integrale $\int_E x_3\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$, dove $E = \Omega \cap B(\mathbf{0}, 1)$.

b. Si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathbf{R}^3} \mathrm{e}^{-(2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3.$$