MATEMATICA II

Seconda prova parziale

7 febbraio 2005

Cognome, nome, numero di matricola e anno di corso:

1. Date le funzioni $F(x) = \lfloor e^{2x} \rfloor + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{n}{2}} \mathbf{1}_{[1-2^{-n},+\infty)}(x)$ e $f(x) = \sqrt{|x-1|}$, si stabilisca se è $f \in \mathcal{RS}_F([-1,1])$ e, in caso affermativo, si calcoli
$$\int_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{d}F(x).$$

2. Si stabilisca per quali valori di $a \in \mathbf{R}$ la funzione
$$F_a(t) = \frac{a}{(t-2)^5} \mathbf{1}_{(-\infty,1)}(t) + |a|(2 - e^{-t}) \mathbf{1}_{[1,+\infty)}(t)$$
è funzione di ripartizione di una variabile aleatoria X. Per tali valori di a si discuta l'esistenza dei momenti di X e si calcoli la media di X, nel caso essa esista.

3. Si calcoli il valore dei seguenti integrali doppi estesi ai domini a fianco indicati

a.
$$\int_E \cos x_1 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2, \qquad E = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : \ \frac{2}{\pi}|x_1| - 1 \le x_2 \le \cos x_1\};$$

b.
$$\int_S \frac{x_1 x_2 \mathrm{e}^{x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{x_1^2 + x_2^2} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2, \quad S = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4, \ 0 \le x_2 \le x_1\}.$$

4. Si consideri il sottoinsieme Ω di $\mathbf{R}^3$ definito da:
$$\Omega = \Big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_3 \ge (x_1^2 + x_2^2)^{1/3}\Big\}.$$
   (i) Si disegni Ω.
   (ii) Si calcoli (ad esempio "per fili") l'integrale $\int_E x_3 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3$, dove $E = \Omega \cap B(\mathbf{0}, 1)$.

5. Si calcolino gli integrali
$$a. \int_{\mathbf{R}^3} \mathrm{e}^{-(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2)} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3 \qquad b. \int_{\mathbf{R}^3} \mathrm{e}^{-(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2)} \, x_2^2 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3.$$

6. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \, e^{-\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$
   (i) Si stabilisca se f è integrabile in senso generalizzato su $\mathbf{R}^3$.
   (ii) Si calcoli $\int_{\mathbf{R}^3} f(x_1, x_2, x_3) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_3$.