

MATEMATICA II

Prima prova parziale

18 novembre 2004

Cognome, nome, numero di matricola e anno di corso:

1. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, definita da

$$f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 e^{-|\mathbf{x}|^2},$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ indica un vettore di \mathbf{R}^2 e $|\mathbf{x}|$ la sua norma euclidea.

- (i) Si disegni il profilo di f .
- (ii) Si calcolino $\nabla f(\mathbf{x})$ e $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x})$, dove \mathbf{v} è la direzione individuata dal vettore $(-1, 1)$.
Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, 2/e^2)$.
- (iii) Si calcoli la matrice Hessiana $H_f(\mathbf{x})$.
- (iv) Si scriva la formula di Taylor di f centrata in $(1, 0)$, arrestata al secondo ordine, con resto in forma di Peano.
- (v) Si determinino gli estremi liberi della funzione f e della funzione $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, definita da

$$g(\mathbf{x}) = x_1 f(\mathbf{x}).$$

- (vi) Si determinino gli estremi vincolati della funzione g all'insieme $\overline{B}((1, 0), 1)$.

2. Si consideri la funzione $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, definita da

$$h(\mathbf{x}) = (x_1^3 + x_2) f(\mathbf{x}).$$

Si dimostri che $\mathbf{0}$ è un punto critico per h e se ne studi la natura.