MATEMATICA II

29 giugno 2006

Cognome, nome, numero di matricola e anno di corso:

1. Si calcoli l'integrale
$$\int_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-(7x^2+8xy+7y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2. Si calcoli
$$\int_{\mathbf{R}^3\setminus B(\mathbf{0},1)} \frac{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3}{|\mathbf{x}|(1+|\mathbf{x}|^4)\arctan|\mathbf{x}|^2}.$$

3. Si calcolino gli integrali
$$a.\ \int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \text{ con } D=([-1,1]\times[-1,1])\setminus B(\mathbf{0},1).$$
$$b.\ \int_\Omega \frac{y}{1+x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad \text{dove } \Omega=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x\in[0,1],\ x\le y\le\sqrt{x}\};$$

4. Si determinino gli estremi assoluti della funzione
$$f(x,y)=x^3+x^2y,$$
vincolati all'insieme $S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ x^2+|y|\le 1\}$.

5. Si consideri la funzione $f:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}$ definita da
$$f(\mathbf{x})=\begin{cases}|\mathbf{x}|+|\mathbf{x}|^{-1} & \text{se } \mathbf{x}\neq\mathbf{0}\\ 0 & \text{se } \mathbf{x}=\mathbf{0},\end{cases}$$
dove $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ indica un vettore di $\mathbf{R}^2$ e $|\mathbf{x}|$ la sua norma euclidea.
(i) Si calcolino $\nabla f(\mathbf{x})$ e $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x})$, dove $\mathbf{v}$ è la direzione individuata dal vettore $(1,-1)$. Si scriva il differenziale di f nel punto $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$, giustificandone l'esistenza.
(ii) Si disegni il profilo di f e si determinino eventuali estremi liberi di f.
(iii) Si scriva la formula di Taylor di f, arrestata al secondo ordine, con resto in forma di Peano, centrata in $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$.
(iv) Si calcoli la matrice Jacobiana della trasformazione $\phi\circ f$ in $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, dove $\phi(t)=(0,t,e^t)^T$.