

Cognome: ..... Nome: ..... Matricola:

Università di Milano - Bicocca  
Corso di laurea di primo livello in Scienze statistiche ed economiche  
Corso di laurea di primo livello in Statistica e gestione delle informazioni  
Matematica II  
30.6.08

1) Si consideri l'insieme  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x \leq y \leq \sqrt{x - 1}; y \geq x^2 - 4x + 3\}$ ; si determini estremo superiore, estremo inferiore, eventuali massimi e minimi locali e globali della funzione

$$f(x, y) = 2^{|x|-|y|}$$

nell'insieme  $\Omega$ .

2) Si consideri la funzione  $f : (0, \infty) \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = x^y - y^2 + 2y.$$

a) Si determinino i punti  $(x_0, y_0)$  nei quali il piano tangente al grafico della funzione  $f$  nel punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  è perpendicolare all'asse  $z$ ;

b) Si calcoli la derivata direzionale di  $f$  nel punto  $(1, 2)$  lungo una delle due direzioni parallele alla retta  $2y + 3x - 1 = 0$ .

c) Si tracci un grafico qualitativo (individuando la retta tangente e la concavità/convessità) della curva di livello  $\gamma$  passante per  $(1, 1)$ .

3) Sia  $T \subset \mathbb{R}^3$  il tetraedro di vertici  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ . Si determini per quali valori di  $\alpha$ , con  $\alpha > 1$ , esiste finito

$$\int_T \frac{1}{(1 - x - y)(1 - x^2 - y^2)^\alpha} dx dy dz.$$

4) Sia  $Q \subset \mathbb{R}^2$  un qualsiasi quadrato di lato 1 con una diagonale parallela alla retta  $y = x$ . Si determini, se esiste, almeno una posizione di  $Q$  in modo tale che la quantità

$$\int_{\mathbb{R}^2} ((x - 1)^2 - y^2) \mathbf{1}_Q(x, y) dx dy$$

sia massima ( $\mathbf{1}_Q$  denota la funzione indicatrice sull'insieme  $Q$ ).