Cognome: .... Nome: .... Matricola:

Università di Milano - Bicocca

Corso di laurea di primo livello in Scienze statistiche ed economiche

Corso di laurea di primo livello in Statistica e gestione delle informazioni

Matematica II

1.9.08

1) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = (x + y)e^{-y^2-x}$.

a) Si determinino l'estremo inferiore e gli eventuali massimi e minimi locali della funzione $f(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$. Non si richiede di determinare l'estremo superiore della funzione.

b) Si determinino gli eventuali massimi e minimi locali della funzione $f(x, y)$ in

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0\}.$$

c) Si determinino i massimi e minimi locali della funzione $f(x, y)$ in

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leq 1\}.$$

d) Determinare, se esistono, la retta tangente alla curva di livello passante per il punto $(1/2, 1/2)$ e la retta tangente alla curva di livello passante per $(2, -1)$.

2) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = ye^{-y^2+x}$. Per ogni α positivo si consideri la regione

$$D_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y \geq 0; \ x \leq y^\alpha; \ y \geq 0\}.$$

Si determinino gli α per i quali esiste finito

$$\int_{D_\alpha} f(x, y) \, \mathtt{d}x\mathtt{d}y.$$

3) Si calcoli

$$\int_{B(\mathbf{0},1)} (x^2 + z^2) \, \mathtt{d}x\mathtt{d}y\mathtt{d}z,$$

ove $B(\mathbf{v}, r) \subset \mathbb{R}^3$ è la bolla chiusa di centro $\mathbf{v}$ e raggio r.

4) Per ogni intero positivo n, si consideri l'insieme $S_n = B(\mathbf{0}, n)\backslash B(\mathbf{0}, n - 1)$, ove $B(\mathbf{v}, r) \subset \mathbb{R}^2$ è la bolla chiusa di centro $\mathbf{v}$ e raggio r. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} -1 & \text{se } (x, y) \in S_n \text{ con } n \text{ pari} \\ \ \ 1 & \text{se } (x, y) \in S_n \text{ con } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Calcolare $\int_{B(\mathbf{0},6)} f(x, y) \, \mathtt{d}x\mathtt{d}y$.

Dopo aver verificato che $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, \mathtt{d}x\mathtt{d}y$ non esiste, si determini una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, (quindi positiva) tale che $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)g(x, y) \, \mathtt{d}x\mathtt{d}y$ esista finito.

SOLUZIONI

1a)

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) =$$

Eventuali massimi e minimi locali di $f(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$:

Giustificazione:

1b)

Eventuali massimi e minimi locali di $f(x,y)$ in B:

Giustificazione:

1c)

Massimi e minimi locali di $f\,(x,y)$ in C:

Giustificazione:

1d)

Esiste la retta tangente alla curva di livello passante per il punto $(1/2, 1/2)$?
In caso affermativo ha equazione ....

Esiste la retta tangente alla curva di livello passante per $(2, -1)$?
In caso affermativo ha equazione ....

Giustificazione:

2) $\int_{D_\alpha} f(x,y)\,\mathtt{d}x\mathtt{d}y$ esiste finito se e solo se $\alpha \in\ \dots$

Giustificazione:

3)

$$\int_{B(\mathbf{0},1)} (x^2+z^2)\,\mathtt{d}x\mathtt{d}y\mathtt{d}z =$$

Giustificazione:

4)

$$\int_{B(\mathbf{0},6)} f(x,y)\ \mathtt{d}x\mathtt{d}y =$$

Giustificazione:

Perché $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ \mathtt{d}x\mathtt{d}y$ non esiste?

$$g\,(x,y) =$$

Perché $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)g(x,y)\ \mathtt{d}x\mathtt{d}y$ esiste finito?