Cognome: .... Nome: .... Matricola:

Università di Milano - Bicocca

Corso di laurea di primo livello in Scienze statistiche ed economiche

Corso di laurea di primo livello in Statistica e gestione delle informazioni

Matematica II

20.04.2007

1) Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = y^2 \arctan e^{-x}$$

nel punto $(0,2,f(0,2))$ e si calcoli la derivata direzionale di f nel punto $(0,2)$, lungo la direzione individuata dal vettore $v = (-1,1)$.

2) Si verifichi che l'equazione

$$e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x+1) + 1 = 0$$

definisce implicitamente, in un intorno del punto $(0,-1)$, una funzione $y = g(x)$. Si dimostri poi che $x = 0$ è punto di minimo locale per g.

3) Si determinino eventuali estremi vincolati all'insieme $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ della funzione

$$h(x,y) = (1+xy)^2.$$

4a) (per chi sostiene l'esame di Matematica II, 6 cfu) Sia $L = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 0, \ |(x,y,z)| > 1\right\}$. Si discuta al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'esistenza di I_α, dove

$$I_\alpha = \iiint_L \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}(x^2+y^2+z^2-1)^\alpha},$$

e si calcoli $I_{1/2}$.

4b) (per chi sostiene l'esame di Elementi di Matematica II, 4 cfu) Sia $L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x|^3 \leq y \leq |x|^{1/3}\right\}$. Si calcoli

$$I = \iint_L \frac{dxdy}{1+x^{2/3}}.$$

5) Sull'insieme $C([0,1])$ delle funzioni continue nell'intervallo $[0,1]$, si definisca la distanza

$$d(F,G) = \left(\int_0^1 [F(t)-G(t)]^2 \, dt\right)^{1/2}, \qquad F, G \in C([0,1]).$$

Posto $F(t) = e^t$, si determini il polinomio di primo grado (retta) P che realizza la minima distanza da F, sapendo che esso esiste.