MATEMATICA II
09 febbraio 2006

Cognome, nome, numero di matricola e anno di corso:

1. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{|\mathbf{x}|} + \mathrm{e}^{-|\mathbf{x}|}.$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ indica un vettore di $\mathbf{R}^2$ e $|\mathbf{x}|$ la sua norma euclidea.

(i) Si calcolino $\nabla f(\mathbf{x})$ e $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x})$, dove $\mathbf{v}$ è la direzione individuata dal vettore $(1, 2)$. Si scriva l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f nel punto $(1/2, -\sqrt{3/4}, \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1})$.

(ii) Si disegni il profilo di f e si determinino eventuali estremi liberi di f.

(iii) Si scriva la formula di Mc Laurin di f, arrestata al secondo ordine, con resto in forma di Peano.

(iv) Si calcoli $\nabla(f \circ F)(s, t)$, dove $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ è definita da $F(s, t) = (s^2 + t^4 + 1, \mathrm{e}^{st})$, giustificandone preliminarmente l'esistenza.

2. Si determinino gli estremi assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^2 y + x y^2 + x y,$$

vincolati all'insieme $Q = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ |x| + |y| \leq 1\}$.

3. Si calcolino gli integrali

$$a. \int_A \sqrt{xy}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \quad \text{dove } A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [0, 2],\ 0 \leq y \leq (x-1)^2\};$$

$$b. \int_D \frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2 + 2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \quad \text{dove } D = \{(x, y) \in B(\mathbf{0}, 1) : |y| \geq |x|\}.$$

4. Si calcoli

$$\int_E \mathrm{e}^{(x+1)y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

dove

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq 1/(x+1)\}.$$

5. Si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathbf{R}^2} x^2\, \mathrm{e}^{-(x^2 + xy + y^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$