

MATEMATICA II

22 febbraio 2006

Cognome, nome, numero di matricola e anno di corso:

1. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^4 - |\mathbf{x}|^2.$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ indica un vettore di \mathbf{R}^2 e $|\mathbf{x}|$ la sua norma euclidea.

- (i) Si calcolino $\nabla f(\mathbf{x})$ e $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x})$, dove \mathbf{v} è la direzione individuata dal vettore $(1, 1)$.
- (ii) Si disegni il profilo di f e si determinino eventuali estremi liberi di f .
- (iii) Si scriva la formula di Taylor di f nel punto $(1, 0)$, arrestata al secondo ordine, con resto in forma di Peano. Qual è l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 0)$?
- (iv) Si calcoli $J_{(\mathbf{c} \circ f)}(\mathbf{x})$, dove $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$.

2. Si determinino gli estremi assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^2y - x^2 - 3y,$$

vincolati all'insieme $S = \{(x, y) \in \overline{B}(\mathbf{0}, \sqrt{2}) : y \leq x^2\}$, dove $\overline{B}(\mathbf{0}, \sqrt{2})$ indica il disco chiuso di centro $\mathbf{0}$ e raggio $\sqrt{2}$.

3. Si calcolino, dopo averne dimostrato l'esistenza, gli integrali

a. $\int_{\Omega} e^{(x-y/x)} dx dy$, dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq x - x^2\}$;

b. $\int_{B(\mathbf{0}, e^2) \setminus B(\mathbf{0}, e)} \frac{|xy|}{(x^2 + y^2)^2 \log(x^2 + y^2)} dx dy$.

4. Si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathbf{R}^2} xy e^{-(x-y)^2} dx dy.$$