

MATEMATICA II

3 maggio 2006

Cognome, nome, numero di matricola e anno di corso:

1. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) = x e^{-(x^2+y^2)}.$$

- (i) Si calcolino ∇f e $D_{\mathbf{v}}f$, dove \mathbf{v} è la direzione individuata dal vettore $(1, 1)$, in un generico punto di \mathbf{R}^2 .
 - (ii) Si scriva la formula di Taylor di f nel punto $(1, 0)$, arrestata al secondo ordine, con resto in forma di Peano. Qual è l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 0, e^{-1})$?
 - (iii) Si calcoli $J_{(\mathbf{c} \circ f)}(x, y)$, dove $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$.
 - (iv) Si determinino eventuali estremi liberi di f .
2. Sia $\bar{B}(\mathbf{0}, \sqrt{2})$ il disco chiuso in \mathbf{R}^2 di centro $\mathbf{0}$ e raggio $\sqrt{2}$. Si determinino gli estremi assoluti della funzione $f : \bar{B}(\mathbf{0}, \sqrt{2}) \rightarrow \mathbf{R}$, definita da

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{1 + x^2 + y^2}.$$

3. Si calcolino, gli integrali

a. $\int_{\Omega} e^{-xy} dx dy$ $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x > 0, y > 0, 1/3 < y/x < 2/3\}$;

b. $\int_{\mathbf{R}^2} \frac{y}{1 + (x^2 + y^2)^2} dx dy$.

4. Si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathbf{R}^2} x^2 e^{-(x+y)^2} dx dy.$$