

COGNOME

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

NOME

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

N. MATRICOLA

--	--	--	--	--	--	--

**ESAME DI MATEMATICA I**

Milano, 20 novembre 2003

Per il superamento della prova occorre il raggiungimento di almeno 18 punti nei primi 4 esercizi

**Esercizio 1** Punti: 6

Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x} + \ln(1-x)}{\ln|x|} \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x - x}{\cos x + \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/2} |\ln x|^{1/3} \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xe^{1/x} - e}{e^{1/x} - \frac{e}{x}}$$

**Esercizio 2** Punti: 2+2+2+2

Data la funzione

$$f(x) = x - \frac{\ln|x|}{x},$$

- Si determinino il campo di esistenza ed il segno;
- Si calcolino i limiti di  $f$  e si determinino gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui);
- Si calcoli la derivata prima e se ne studi il segno;
- Si tracci un grafico qualitativo di  $f$ .

**Esercizio 3** Punti: 1+2

- Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dia la definizione di primitiva di  $f$ .
- Si dica se la funzione  $f(x) = |x|$  ha primitive e, in caso affermativo, se ne determini una.

**Esercizio 4** Punti: 2+2+2+2

- Si calcoli con la definizione  $\int_0^1 \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ .
- Si dica se è finito  $\int_0^1 \ln \sin x dx$ .
- Si studi la convergenza, semplice e assoluta, di  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$ .
- Si calcoli la somma di  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{3^{2n+1}} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ .

**Esercizio 5** Punti: 4

Si dimostri che la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

non ha primitive.

**Esercizio 6** Punti: 4

Si consideri la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln \ln n}{n \ln^a n}$ , con  $a \geq 1$  e si dica per quali valori di  $a$  essa converge.