ESAME DI MATEMATICA I

13 luglio 2006

Cognome:______________________________ nome:______________________________

numero di matricola :____________ anno di corso:________

---

1. (3+3 punti) Si calcolino i seguenti limiti

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \log(1+\sin x)}{\cos(\log(1+x)) - 1} \qquad\qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2^x + (x^2)^{\sqrt{x}}}{3^x + (x)^{(x^2)}}$$

2. Data la funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{e^{1/x}},$$

(i) (1 punti) si determini il campo di esistenza ed il segno,
(ii) (2 punti) si calcolino i limiti di f e si determinino eventuali asintoti,
(iii) (2 punti) si calcoli f' e si determinino punti di masssimo o di minimo,
(iv) (1 punti) si tracci un grafico qualitativo della funzione f.
Non è richiesto lo studio della derivarta seconda.

3. (3+3 punti) Si calcoli l'integrale a) e si stabilisca se esiste finito l'integrale b):

$$\text{a)} \quad \int \frac{e^{2t} + 2e^t}{e^{2t} + 4e^t + 3}\,\mathrm{d}t \qquad\qquad \text{b)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x$$

4. (4 punti) Si studi la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^{2n+1}}{2^{2n+1}\cdot(-5)^{n-1}}.$$

Si studi inoltre la convergenza assoluta e, se possibile, ne si calcoli la somma.

5. (4 punti) Data la funzione $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \sin(\pi\sqrt{x})$, si scriva il polinomio di Taylor di f di secondo grado centrato in $x_0 = 1$. Si scriva poi la relativa formula di Taylor con resto di Lagrange.

6. Si consideri la funzione $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(x) = \int_2^x \frac{e^{-t} - |t|}{t^4 + 1}\,\mathrm{d}t.$$

(i) (2 punti) si calcolino i limiti di F e si determinino eventuali asintoti,
(ii) (2 punti) motivando adeguatamente i passaggi, si calcoli F' e si determinino i punti di masssimo/minimo,
(iii) (2 punti) si tracci un grafico qualitativo della funzione F.
Non é richiesto lo studio della derivata seconda di F.