

MATEMATICA I

15 luglio 2004

Cognome, nome, numero di matricola e anno di corso:

1. Si calcolino

$$\int x \log x \, dx \quad \int \frac{x^2}{(x+1)^4} \, dx.$$

2. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^+ \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{R}$, definita da

$$f(x) = \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}.$$

- (i) Si calcolino, utilizzando lo sviluppo di Taylor di $x \mapsto \log x$ nel punto 1, i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1/2}{x-1}.$$

Si disegni poi un grafico qualitativo di f in un intorno del punto 1.

- (ii) Utilizzando il fatto che $x \mapsto \log x$ è concava in \mathbf{R}^+ , si mostri che $\log x \leq x - 1$ in \mathbf{R}^+ .
- (iii) Si studi il segno di f (può essere utile (ii)).
- (iv) Si studi il comportamento di f agli estremi del suo dominio.
- (v) Sia $F : E \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione

$$F(x) = \int_1^x f(s) \, ds,$$

dove E indica l'insieme degli x in \mathbf{R} per i quali l'integrale a secondo membro esiste finito. Si determini E e si tracci un grafico qualitativo di F .