

COGNOME

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

NOME

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

N. MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

ESAME DI MATEMATICA I

Milano, 9 luglio 2003

Per il superamento della prova occorre il raggiungimento di almeno 18 punti nei primi 4 esercizi

Esercizio 1 Punti: 6

Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x-1} + e^x} \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\ln^2(1 + \frac{1}{x})}$$

Esercizio 2 Punti: 2+2+2+2

Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - |x - 2|},$$

- Si determini il suo campo di esistenza ed il segno;
- Si calcolino i limiti di f e si determinino gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui);
- Si calcoli la derivata e si dica se f è derivabile in $x = 2$;
- Si tracci un grafico qualitativo di f .

Esercizio 3 Punti: 2+2

- Si dica che cosa significa che una funzione f è derivabile in un punto c .
- Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{\sin x - x}{x} & x < 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & x > 0. \end{cases}$$

e si dica in quali punti la funzione f è derivabile.

Esercizio 4 Punti: 2+2+2

- Si calcoli $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$.
- Si dica se è finito $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{|x|}} dx$.
- Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n + 2^n}{e^n + \frac{1}{n+1}}.$$

Esercizio 5 Punti: 4

Si calcoli

$$\int_{-1/2}^1 \frac{1}{x + \sqrt{|x|}} dx.$$

Esercizio 6 Punti: 4

Data la funzione $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \arctan(\ln x)$, si scriva il polinomio di Taylor di f di secondo grado centrato in $y = 1$. Si scriva poi la relativa formula di Taylor.