

MATEMATICA I

4 maggio 2006

Cognome: _____ nome: _____

numero di matricola : _____ anno di corso: _____

1. Si considerino i seguenti integrali:

a. $\int_{-1}^1 \frac{12x}{x^3 + 8} dx$ b. $\int_{-100}^{\infty} \frac{x+1}{\sin x + x^3} dx.$

- (i) (3 punti) Si determini se l'integrale a. esiste e in caso affermativo lo si calcoli;
(ii) (2 punti) si determini se l'integrale b. esiste.

2. (5 punti) Si studi la funzione $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{x}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

3. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definita da

$$f(x) = \frac{\mathbf{1}_{[1,4]}(x) + \mathbf{1}_{[2,3]}(x)}{4},$$

ove $\mathbf{1}_A$ denota la funzione indicatrice dell'insieme $A \subset \mathbf{R}$.

- (i) (3 punti) Si calcoli e si tracci un grafico qualitativo della funzione $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definita da

$$F(x) = \int_{-2}^x f(s) ds.$$

- (ii) (3 punti) Si calcoli e si tracci un grafico qualitativo della funzione $G : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definita da

$$G(x) = \int_0^x (f(s) + \mathbf{1}_{\{5\}}(s)) ds.$$

4. Si consideri la funzione $f : (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\log |x|}{x-1}.$$

- (i) (3 punti) Si classifichino le discontinuità della funzione f nei punti $x = 0$ e $x = 1$; se e ove è possibile, si prolunghi la funzione con continuità.
- (ii) (3 punti) Considerando la funzione f prolungata, si calcolino, se esistono, $f'(0)$ e $f'(1)$.

5. (4 punti) Si studi la convergenza semplice e assoluta della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n} + 2)^2}.$$

6. (4 punti) Si calcoli il seguente limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\sin x + 1) - \sin x}{(1 - 5x^2)^{1/5} - \cos(x\sqrt{2})}.$$