

MATEMATICA I

29 gennaio 2004

Cognome, nome, numero di matricola e anno di corso:

1. Si calcolino

$$\int x^2 e^{-x} dx \quad \int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} dx.$$

2. Si studi l'esistenza degli integrali impropri seguenti

$$\int_0^1 \log x dx \quad \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx.$$

3. Per quali valori di x l'integrale (proprio o improprio)

$$\int_0^x \frac{e^{-s^2}}{1-s} ds$$

esiste finito? Sia E l'insieme di tali valori. Sia $F : E \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{-s^2}}{1-s} ds.$$

- (i) Si calcolino F' , motivando il procedimento seguito, e F'' ;
- (ii) si studi l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali o verticali di F ;
- (iii) si studi la crescita e la decrescenza di F ;
- (iv) si tracci un grafico qualitativo di F .

4. Si calcolino, giustificando dettagliatamente il procedimento seguito, i limiti seguenti:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)^{x^2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{1/3} - 1}{e^{x^2} - 1} \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^{-3} e^{-1/x^2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 \sin x^2}{(e^{x^2} - 1)^2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log^2(x+1) - e^{x^2} + 1}{x - \sin x - x^3/6} \end{array}$$