Università di Milano - Bicocca

Corso di laurea di primo livello in Scienze statistiche ed economiche

Corso di laurea di primo livello in Statistica e gestione delle informazioni

Matematica I - 17.09.08

1) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Le tre proprietà seguenti:

$a)\ f(0)=1$ $\qquad$ $b)\ f$ ha un punto di massimo relativo in 0 $\qquad$ $c)\ f$ è pari

non si implicano a vicenda in alcun modo, cioè

$$a \not\Rightarrow b\,,\quad a \not\Rightarrow c\,,\quad b \not\Rightarrow a\,,\quad b \not\Rightarrow c\,,\quad c \not\Rightarrow a\,,\quad c \not\Rightarrow b\,.$$

Per dimostrare la falsità di queste implicazioni vengono proposti di seguito alcuni contresempi, che possono essere o non essere corretti. Individuare quelli corretti.

$a \not\Rightarrow b$; contresempi proposti: $f(x)=1-x^2\ ,\ f(x)=x+1\ ,\ f(x)=1+x^2$

$a \not\Rightarrow c$; contresempi proposti: $f(x)=\cos(x)\ ,\ f(x)=e^x\ ,\ f(x)=x^2$

$b \not\Rightarrow a$; contresempi proposti: $f(x)=-x^2\ ,\ f(x)=1+\cos(x)\ ,\ f(x)=2\cos(x)$

$b \not\Rightarrow c$; contresempi proposti: $f(x)=x\ ,\ f(x)=-x^2\ ,\ f(x)=-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$

$c \not\Rightarrow a$; contresempi proposti: $f(x)=\sin(x)\ ,\ f(x)=\cos(x)\ ,\ f(x)=x^2$

$c \not\Rightarrow b$; contresempi proposti: $f(x)=x^2\ ,\ f(x)=-x^2\ ,\ f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$

2) Tracciare un grafico della funzione

$$f(x)=(1-x)\,e^{x+x^2}\ ,$$

evidenziandone l'insieme di definizione, i limiti, il crescere e il decrescere (non è richiesto lo studio della concavità). Dedurre la validità della disuguaglianza

$$\frac{1}{1-x}\le e^{x+x^2}$$

per ogni $x\in[0,1/2]$.

3) Calcolare il valore, finito o infinito, dei seguenti integrali.

$$I=\int_1^2\frac{x^2+x+1}{x^3+x}dx\ ,\qquad J=\int_0^1\frac{x^2+x+1}{x^3+x}dx\ .$$

4) Scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado $P_2(x)$, centrato in $x_0=1$, della funzione

$$f(x)=x^x\ .$$

5) Calcolare le somme delle seguenti serie numeriche:

$$A=\sum_{k=100}^{+\infty}\pi^{-k}\ ,\qquad\qquad B=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\pi^{-k}\right)\ .$$