X

Università di Milano - Bicocca
Corso di laurea di primo livello in Scienze statistiche ed economiche
Corso di laurea di primo livello in Statistica e gestione delle informazioni
Matematica I - 13.02.08

1) Date le funzioni

$$f(x) = \log x \ , \quad g(x) = x - \log x \ ,$$

scrivere esplicitamente le funzioni composte $f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$ e determinarne gli insiemi di definizione.

2) Tracciare un grafico della funzione

$$f(x) = 10 - e^x - \frac{1}{2}x - \log(e^x + 1) \ ,$$

evidenziandone l'insieme di definizione, i limiti, il crescere e il decrescere, la convessità e la concavità.

3)
i) Stabilire se i seguenti integrali impropri esistono finiti o infiniti.

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \log\left(1 + e^{-x}\right) \, dx \ , \ J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \log\left(1 + e^{-x}\right) \, dx \ .$$

ii) Tracciare un grafico della funzione

$$g(x) = \int_1^x \sqrt[3]{\log(t) + t - 1} \, dt \ ,$$

evidenziandone l'insieme di definizione, i limiti, il crescere e il decrescere, la convessità e la concavità.

4) prima versione
Il seguente teorema è **falso** e quindi la sua dimostrazione è **sbagliata**. Si chiede di
i) individuare l'errore o gli errori nella dimostrazione, giustificando il proprio giudizio;
ii) dimostrare la falsità del teorema producendo un contresempio (un grafico accurato è sufficiente).
Teorema. *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R})$*, strettamente decrescente e tale che* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1^-$ *e* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$*. Allora non esiste* $c \in \mathbb{R}$ *tale che* $f'(c) = 0$*.*

Dimostrazione.

I passo. Per assurdo supponiamo esista $c \in \mathbb{R}$ tale che $f'(c) = 0$.

II passo. Siano $x_0 < c$ e $x_1 > c$. Allora $f(x_0) > f(c) > f(x_1)$.

III passo. Essendo $x_0 < c < x_1$, ed f strettamente decrescente, dal Teorema del valor medio segue $f'(c) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \neq 0$.

4) seconda versione

Il seguente teorema è **falso** e quindi la sua dimostrazione è **sbagliata**. Si chiede di

i) individuare l'errore o gli errori nella dimostrazione, giustificando il proprio giudizio;

ii) dimostrare la falsità del teorema producendo un contresempio (un grafico accurato è sufficiente).

Teorema. *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R})$ *tale che* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1^+$ *e* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1^-$. *Allora esiste un punto* $c \in \mathbb{R}$ *tale che* $f'(c) = 1$.

Dimostrazione.

I passo. Per ipotesi esistono $A < 0$ e $B > 0$ tali che $-1 \leq f(x) \leq -1/2$ per $x \leq A$ e $1/2 \leq f(x) \leq 1$ per $x \geq B$.

II passo. Allora per il Teorema degli zeri esistono x_0 e x_1 tali che $f(x_0) = -1/2$ e $f(x_1) = 1/2$.

III passo. Infine, per il Teorema del valor medio esiste c compreso tra x_0 e x_1 tale che $f'(c) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = 1$.