A Nome: .... Cognome: .... Matricola: ....

Università di Milano Bicocca

Corso di Laurea di primo livello in Scienze Statistiche ed economiche

Corso di Laurea di primo livello in Statistica e gestione delle informazioni

Matematica I – 22 aprile 2008

1) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stabilire quali delle seguenti condizioni sono necessarie e quali sono sufficienti affinché $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$:

a) che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
b) che $f(x) \geq -1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
c) che f sia strettamente decrescente e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2) Studiare la funzione

$$f(x) = x + \log(1 - x^2)$$

precisandone il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti, la monotonia e gli eventuali punti di massimo/minimo, la convessità/concavità e gli eventuali punti di flesso. Tracciare quindi un grafico qualitativo della funzione.

3) Calcolare il seguente integrale, giustificando i passaggi svolti:

$$I = \int_1^e \frac{\arctan(\log x)}{x}\, dx.$$

4) Scrivere lo sviluppo di McLaurin della funzione

$$h(x) = \frac{x^6}{8 + x^3}.$$

Quanto vale $h^{(12)}(0)$ (derivata dodicesima di h in 0)? (scrivere il risultato senza svolgere i conti).

5) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite

$$J_\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^\alpha} \int_{\sqrt{\pi}}^{x^2+\sqrt{\pi}} \cos(t^2)\, dt$$

esiste finito.

B Nome: . . . . Cognome: . . . . Matricola: . . . .

Università di Milano Bicocca
Corso di Laurea di primo livello in Scienze Statistiche ed economiche
Corso di Laurea di primo livello in Statistica e gestione delle informazioni
Matematica I – 22 aprile 2008

1) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stabilire quali delle seguenti condizioni sono necessarie e quali sufficienti affinché $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$:

a) che 0 sia un valore di massimo assoluto per f;
b) che f sia limitata superiormente;
c) che f sia limitata superiormente ed inferiormente.

2) Studiare la funzione

$$f(x) = 2x - \log(1 - x^2)$$

precisandone il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti, la monotonia e gli eventuali punti di massimo/minimo, la convessità/concavità e gli eventuali punti di flesso. Tracciare quindi un grafico qualitativo della funzione.

3) Calcolare il seguente integrale, giustificando i passaggi svolti:

$$I = \int_e^{e^2} \frac{(\log x)(\log(\log(x)))}{x}\, dx.$$

4) Scrivere lo sviluppo di McLaurin della funzione

$$h(x) = \frac{x^2}{2 - x^5}.$$

Quanto vale $h^{(12)}(0)$ (derivata dodicesima di h in 0)? (scrivere il risultato senza svolgere i conti).

5) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite

$$J_\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^\alpha} \int_1^{1+\sin x} e^{t^2}\, dt$$

esiste finito.

C Nome: .... Cognome: .... Matricola: ....

Università di Milano Bicocca

Corso di Laurea di primo livello in Scienze Statistiche ed economiche

Corso di Laurea di primo livello in Statistica e gestione delle informazioni

Matematica I – 22 aprile 2008

1) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stabilire quali delle seguenti condizioni sono necessarie e quali sufficienti affinché $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$:

a) che f sia limitata inferiormente; ;

b) che esista $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;

c) che 1 sia un valore di minimo assoluto per f.

2) Studiare la funzione

$$f(x) = x^2 + \log(1 - x)$$

precisandone il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti, la monotonia e gli eventuali punti di massimo/minimo, la convessità/concavità e gli eventuali punti di flesso. Tracciare quindi un grafico qualitativo della funzione.

3) Calcolare il seguente integrale, giustificando i passaggi svolti:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \arctan(\sin x) \, dx.$$

4) Scrivere lo sviluppo di McLaurin della funzione

$$h(x) = \frac{1}{4 + x^2}.$$

Quanto vale $h^{(12)}(0)$ (derivata dodicesima di h in 0)? (scrivere il risultato senza svolgere i conti).

5) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite

$$J_\alpha = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^\alpha} \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{x^2 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin(t^2) \, dt$$

esiste finito.

D Nome: .... Cognome: .... Matricola: ....

Università di Milano Bicocca

Corso di Laurea di primo livello in Scienze Statistiche ed economiche

Corso di Laurea di primo livello in Statistica e gestione delle informazioni

Matematica I – 22 aprile 2008

1) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stabilire quali delle seguenti condizioni sono necessarie e quali sufficienti affinché $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 5$:

a) che $f(x) \leq 10$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

b) che f sia crescente e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$;

c) che esista $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 5$.

2) Studiare la funzione

$$f(x) = -x^2 - \log(x-1)$$

precisandone il dominio di definizione, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti, la monotonia e gli eventuali punti di massimo/minimo, la convessità/concavità e gli eventuali punti di flesso. Tracciare quindi un grafico qualitativo della funzione.

3) Calcolare il seguente integrale, giustificando i passaggi svolti:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \, \sin x \, \log(\cos x)\, dx.$$

4) Scrivere lo sviluppo di McLaurin della funzione

$$h(x) = \frac{1}{8-x^3}.$$

Quanto vale $h^{(12)}(0)$ (derivata dodicesima di h in 0)? (scrivere il risultato senza svolgere i conti).

5) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite

$$J_\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^\alpha} \int_1^{1+\log(1+x)} e^{t^2}\, dt$$

esiste finito.

SOLUZIONI

1) la condizione a) è necessaria? | SÌ | NO | Perché?

la condizione a) è sufficiente? | SÌ | NO | Perché?

la condizione b) è necessaria? | SÌ | NO | Perché?

la condizione b) è sufficiente? | SÌ | NO | Perché?

la condizione c) è necessaria? | SÌ | NO | Perché?

la condizione c) è sufficiente? | SÌ | NO | Perché?

2) Dominio di f:

Limiti ed eventuali asintoti:

Studio del segno di f':

Studio del segno di f'':

Grafico di f:

3) $I =$

Giustificazione:

4) $h(x) =$

Giustificazione:

$h^{(12)}(0) =$

Giustificazione:

5) Valori di α per i quali J_α esiste finito: $\boxed{}$

Giustificazione della risposta: