A Nome: .... Cognome: .... Matricola: ....

Università di Milano Bicocca

Corso di Laurea di primo livello in Scienze Statistiche ed economiche

Corso di Laurea di primo livello in Statistica e gestione delle informazioni

Analisi Matematica I – prima prova parziale – 17 novembre 2008

1) Dato $x \in \mathbb{R}$, stabilire quali delle seguenti condizioni sono necessarie e quali sono sufficienti affinché $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converga:

a) che la successione $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converga;

b) che $x = \dfrac{1}{2}$;

c) che $e^{x^2-1} < 1$.

2) Date le due funzioni

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 1, \qquad g(x) = e^{|x-2|},$$

a) tracciare i grafici di f e di g attraverso opportune modiche di grafici di funzioni elementari;

b) scrivere esplicitamente le funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ determinandone gli insiemi di definizione.

3) Risolvere le seguenti disequazioni

$$i) \quad |3x-2| \leq |x-1| + 1, \qquad ii) \quad \sqrt{|x-1|} < |2-x|,$$

e interpretare graficamente i risultati ottenuti.

4) Calcolare i seguenti limiti, giustificando i passaggi svolti:

$$L_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n+\sin(n)}}{n+4},$$

$$L_2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n\, e^n)}{n+1},$$

$$L_3 = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x-x^2}.$$

5) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sia

$$a_n = \inf\left\{ x \in \mathbb{R} : \ \frac{|x - \log\frac{1}{n}|}{|2x-n|} \geq 1 \right\}.$$

Calcolare

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}.$$

B Nome: .... Cognome: .... Matricola: ....

Università di Milano Bicocca

Corso di Laurea di primo livello in Scienze Statistiche ed economiche

Corso di Laurea di primo livello in Statistica e gestione delle informazioni

Analisi Matematica I – prima prova parziale – 17 novembre 2008

1) Dato $x \in \mathbb{R}$, stabilire quali delle seguenti condizioni sono necessarie e quali sono sufficienti affinché $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converga:

$$\begin{aligned} &a) \quad \text{che } x = 1; \\ &b) \quad \text{che } \lim_{n\to+\infty} x^n = 0; \\ &c) \quad \text{che } e^{1-x^2} \geq 1. \end{aligned}$$

2) Date le due funzioni

$$f(x) = |\log(x-1)|, \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}},$$

a) tracciare i grafici di f e di g attraverso opportune modiche di grafici di funzioni elementari;

b) scrivere esplicitamente le funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ determinandone gli insiemi di definizione.

3) Risolvere le seguenti disequazioni

$$i) \quad |1+x| \leq \sqrt{|x+2|}, \qquad ii) \quad |x+2| > |2x+1| - 1,$$

e interpretare graficamente i risultati ottenuti.

4) Calcolare i seguenti limiti, giustificando i passaggi svolti:

$$L_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n-5}{\sqrt{n^2 - n + \cos n} - \sqrt{n^2 + 2n}},$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{x + \sqrt{x}},$$

$$L_3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+n}{\log(n\, e^{-n})}.$$

5) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sia

$$a_n = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|3x - 2^n|}{|x + 3^n|} < 1 \right\}.$$

Calcolare

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^2}.$$

C Nome: .... Cognome: .... Matricola: ....

Università di Milano Bicocca

Corso di Laurea di primo livello in Scienze Statistiche ed economiche

Corso di Laurea di primo livello in Statistica e gestione delle informazioni

Analisi Matematica I – prima prova parziale – 17 novembre 2008

1) Dato $x \in \mathbb{R}$, stabilire quali delle seguenti condizioni sono necessarie e quali sono sufficienti affinché $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverga a $+\infty$:

a) che la successione $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverga a $+\infty$;

b) che $x = 3/4$;

c) che $e^{1-|x|} \leq 1$.

2) Date le due funzioni

$$f(x) = \sqrt{|x|-1}, \qquad g(x) = \frac{1}{2x+1},$$

a) tracciare i grafici di f e di g attraverso opportune modiche di grafici di funzioni elementari;

b) scrivere esplicitamente le funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ determinandone gli insiemi di definizione.

3) Risolvere le seguenti disequazioni

$$i)\quad 1 - \frac{1}{x} < 2 - 3|x|, \qquad ii)\quad \Big|1 - |x-2|\Big| > \frac{1}{2},$$

e interpretare graficamente i risultati ottenuti.

4) Calcolare i seguenti limiti, giustificando i passaggi svolti:

$$L_1 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+4}{n-1}},$$

$$L_2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{\log(n^2 e^{\sqrt{n}})},$$

$$L_3 = \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{x + x^2}.$$

5) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sia

$$a_n = \sup\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{|x + \log\frac{1}{n}|}{|2x-n|} \geq 1\right\}.$$

Calcolare

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}.$$

D Nome: .... Cognome: .... Matricola: ....

Università di Milano Bicocca
Corso di Laurea di primo livello in Scienze Statistiche ed economiche
Corso di Laurea di primo livello in Statistica e gestione delle informazioni
Analisi Matematica I – prima prova parziale – 17 novembre 2008

1) Dato $x \in \mathbb{R}$, stabilire quali delle seguenti condizioni sono necessarie e quali sono sufficienti affinché $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverga a $+\infty$:

$a)$ che esista $t \geq 0$ tale che $x = e^t$;
$b)$ che $x = 3$;
$c)$ che $\lim_{n\to+\infty} x^n = +\infty$.

2) Date le due funzioni

$$f(x) = \log(1 - |x|), \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}},$$

a) tracciare i grafici di f e di g attraverso opportune modiche di grafici di funzioni elementari;

b) scrivere esplicitamente le funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$ determinandone gli insiemi di definizione.

3) Risolvere le seguenti disequazioni

$$i) \quad \Big||2x| - 3\Big| < 2 + x, \qquad ii) \quad \frac{1}{x} - 1 \leq |2x - 4|,$$

e interpretare graficamente i risultati ottenuti.

4) Calcolare i seguenti limiti, giustificando i passaggi svolti:

$$L_1 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1+\sqrt{n}}{4n+2}},$$

$$L_2 = \lim_{x\to0^+} \frac{4^x - 3^x}{x - \sqrt{x}},$$

$$L_3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\log(n^2 e^{-n-1})}.$$

5) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sia

$$a_n = \sup\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{|x + 4^n|}{|3x + e^n|} > 1\right\}.$$

Calcolare

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^3}.$$

SOLUZIONI

1) la condizione a) è necessaria? | SÌ | NO | Perché?

la condizione a) è sufficiente? | SÌ | NO | Perché?

la condizione b) è necessaria? | SÌ | NO | Perché?

la condizione b) è sufficiente? | SÌ | NO | Perché?

la condizione c) è necessaria? | SÌ | NO | Perché?

la condizione c) è sufficiente? | SÌ | NO | Perché?

2) a)

grafico di f	grafico di g

b) $f(g(x)) =$, definita per $x \in$

$g(f(x)) =$, definita per $x \in$

3) Risoluzione di *i)*

interpretazione grafica

Risoluzione di *ii)*

interpretazione grafica

4) $L_1 =$

$L_2 =$

$L_3 =$

5) $\ell = \boxed{}$

Giustificazione della risposta: