

# Statistica Matematica

## Prova scritta del 18.11.2002

### Esercizio 1

Siano date due urne  $U_1$  e  $U_2$ . Nell'urna  $U_1$  ci sono due palline bianche e una nera, nell'urna  $U_2$  ci sono due palline nere e una bianca. Si lancia un dado: se esce un numero non superiore a 3 si estrae una pallina dall'urna  $U_1$ , altrimenti si estrae una pallina dall'urna  $U_2$ .

- Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia nera;
- calcolare la probabilità che il lancio del dado abbia fornito un numero non superiore a 3 sapendo che è stata estratta una pallina nera;
- calcolare la probabilità che il lancio del dado abbia fornito come esito il numero 1 sapendo che è stata estratta una pallina nera.

### Esercizio 2

Sia  $X$  una variabile casuale (v.c.) con funzione di densità

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2} \quad x > 1$$

- Calcolare il supporto, la funzione di densità (f.d.) e la funzione di ripartizione (f.r.) della v.c.  $Y = \ln X$ ;
- calcolare il supporto, la funzione di probabilità (f.p.) e la f.r. della v.c.

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{se } X > 2 \\ 1 & \text{se } X \leq 2 \end{cases}$$

### Esercizio 3

Sia  $(x_1, \dots, x_n)$  un campione casuale di ampiezza  $n$  ottenuto da una v.c.  $X$  esponenziale negativa di parametro  $\lambda$ .

- Si verifichi se la statistica  $\sum_{i=1}^n X_i$  è sufficiente;
- si determini lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\lambda$  e si decida quale relazione intercorre tra il medesimo e la media campionaria;
- si individui lo stimatore di massima verosimiglianza per  $g(\lambda) = \lambda^{-1}$  e si verifichi se è corretto.

### Esercizio 4

Si supponga di effettuare  $n = 25$  prove indipendenti nella variabile casuale  $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 16)$  al fine di sottoporre a verifica l'ipotesi nulla  $H_0 : \mu = 1$  in alternativa all'ipotesi  $H_1 : \mu = 0$  pervenendo alla  $n$ -upla  $(x_1, \dots, x_{25})$ .

- Si individui la funzione di potenza del test caratterizzato dalla seguente zona di rifiuto  $\{(x_1, \dots, x_{25}) : (x_1 + x_{25})/2 < 0.2\}$ ;
- si individui il test più potente per le ipotesi considerate avente la stessa probabilità dell'errore di prima specie del test proposto al punto (a)