

**Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica 1**  
**Prova scritta del 12/6/2002**

**Esercizio 1**

La probabilità che nasca una figlia femmina da una coppia con  $n_f$  figlie femmine e  $n_m$  figli maschi è

$$\frac{1}{2} + \frac{n_f}{20} - \frac{n_m}{30}$$

- a) Calcolare la probabilità che il quarto figlio sia una femmina sapendo che i primi tre sono maschi;
- b) calcolare la probabilità che almeno uno dei primi tre figli sia una femmina.

**Esercizio 2**

Assegnata la funzione

$$f(x; c) = cx \ln x \quad 0 < x < 1$$

determinare la costante  $c$  in modo tale che rappresenti la funzione di densità di una variabile casuale  $X$ .

Calcolare le funzioni di ripartizione, di densità e il supporto della variabile casuale  $Y = \ln X$ .

**Esercizio 3**

Si supponga di effettuare  $n$  prove indipendenti nella variabile casuale  $X$  avente la seguente funzione di densità

$$\varphi(x) = (\theta + 1)x^\theta \quad 0 < x < 1$$

con  $\theta > 0$  parametro incognito.

- a) Calcolare lo stimatore di  $\theta$  con il metodo dei momenti;
- b) calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza (SMV) di  $\theta$ .

**Esercizio 4**

Si consideri la variabile casuale  $X$  avente la seguente funzione di densità

$$\varphi(x; a) = 3a^{-1}x^2 \exp\left(-\frac{x^3}{a}\right) \quad x > 0$$

dove  $a > 0$  è un parametro ignoto.

Realizzate  $n$  prove indipendenti in  $X$

- a) determinare il test più potente di livello  $\alpha$  per testare

$$H_0 : a = a_0 \quad \text{contro} \quad H_1 : a = a_1 (a_1 > a_0)$$

(si osservi che  $X^3$  è distribuita come un'esponenziale di parametro  $1/a$ ).

Stabilire se il test ottenuto è UMP per

$$H_0 : a = a_0 \quad \text{contro} \quad H_1 : a > a_0$$

- b) Calcolare un intervallo di confidenza di livello  $\alpha$  per  $a$  (l'opportuna quantità pivotale si può evincere dalla soluzione del punto a).