

**Statistica Matematica**  
**Prova scritta del 30.01.2002**

**Esercizio 1**

Sia  $X$  una variabile casuale (v.c.) che assume i valori  $-2, 0, 1, 3, 8$  con probabilità  $0.2, p, 0.1, 0.3 - p$  e  $0.4$  rispettivamente.

- (a) È possibile determinare  $p$  univocamente?
- (b) Calcolare la funzione di ripartizione.
- (c) Determinare media e mediana.
- (d) Valutare  $P(X^2 < 4)$ .

**Esercizio 2**

Il dado A ha quattro facce rosse e due blu, il dado B ne ha due rosse e quattro blu. Si fa il seguente gioco. Si lancia una moneta non truccata. Se viene testa, il gioco continua con lanci ripetuti del dado A; se viene croce è il dado B ad essere lanciato ripetutamente.

- (a) Mostrare che ad ogni lancio la probabilità di ottenere rosso è  $1/2$ .
- (b) Se i primi due lanci del dado danno rosso, quale è la probabilità di ottenere rosso al terzo lancio?
- (c) Si calcoli la probabilità che nei primi  $n$  lanci esca rosso.

**Esercizio 3**

Sia  $X$  una v.c. che interpreta l'attitudine al fumo in una popolazione e che può assumere i valori  $0$  (non fumatore) e  $1$  (fumatore) con probabilità ignote. Estratti casualmente  $90$  soggetti si è riscontrato che  $40$  di questi sono fumatori.

- (a) Si calcoli la stima di massima verosimiglianza per l'ignota proporzione dei fumatori sapendo che lo spazio parametrico è  $\Theta = \{1/3, 2/3\}$ .
- (b) Cambierebbe la stima se lo spazio parametrico fosse  $\Theta = (0, 1)$ ? In caso di risposta affermativa si indichi la nuova stima.
- (c) cambierebbe la stima se lo spazio parametrico fosse  $\Theta = [1/2, 1)$ ? In caso di risposta affermativa si indichi la nuova stima.
- (d) Si decida se lo stimatore descritto dalla stima individuata al punto (b) è sufficiente, consistente ed efficiente secondo Rao-Cramér.

**Esercizio 4**

Si supponga che il peso alla nascita dei neonati possa essere interpretato con una v.c. Normale di varianza  $1.44 \text{ kg}^2$ . Al fine di decidere se il peso medio possa ritenersi almeno pari a  $3.5 \text{ kg}$  si scelgono casualmente  $25$  bambini il cui peso medio risulta  $3.4 \text{ kg}$ .

- (a) Si individui il test uniformemente più potente per l'ipotesi emessa con  $\alpha = 0.08$  e si decida se tale ipotesi viene rifiutata o meno;
- (b) per il test caratterizzato dalla zona critica  $\Omega_1 = \{(x_1, \dots, x_{25}) : \bar{x} \leq 3\}$  si decida se la potenza è crescente in  $\mu$ ;
- (c) si calcoli la probabilità che su  $5$  bambini estratti casualmente almeno  $4$  abbiano un peso superiore all'ignoto peso medio.