**Statistica Matematica**
**Prova scritta del 16/4/2002**

**Esercizio 1**
Le urne A, B, C contengono palline così distribuite l'urna A contiene 5 palline rosse e 2 nere, l'urna B contiene 4 palline rosse e 8 nere e infine l'urna C contiene 2 palline rosse ed 3 nere. Da ogni urna si estrae a caso una pallina.
Calcolare la probabilità $p$ che la pallina estratta da B sia nera (evento $F$) sapendo che delle 3 palline estratte esattamente 2 sono nere (evento $G$).
Valutare le probabilità degli eventi $\bar{F}|G$, $F|\bar{G}$, $\bar{F}|\bar{G}$ dando una definizione precisa per ciascuno di questi.

**Esercizio 2**
Sia $X$ una variabile casuale con la seguente funzione di densità

$$\varphi(x) = 2(1-x) \quad 0 < x < 1$$

Calcolare la funzione di ripartizione, la densità e il supporto delle seguenti variabili:
a) $Y = 2X - 1$,
b) $T = X^2$.
c) Determinare $P(1 < Y^2 + 4X < 3)$.

**Esercizio 3**
Si supponga di effettuare $n$ prove indipendenti nella variabile casuale $X$ avente la seguente funzione di densità

$$\varphi(x) = \frac{2x}{\theta} \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) \quad x > 0$$

con $\theta > 0$ parametro incognito.
a) Calcolare con il metodo dei momenti lo stimatore di $\theta$ (può essere utile ricordare che $\int_0^\infty \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}/2$);
b) calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza (SMV) di $\theta$;
c) stabilire se SMV è corretto per $\theta$ e se la sua varianza raggiunge il limite inferiore della disuguaglianza di Fréchet-Rao-Cramér.

**Esercizio 4**
Si consideri la variabile casuale $X$ avente come funzione di densità una delle seguenti

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \varphi_1(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Realizzata una prova in $X$
a) determinare il test più potente di livello $\alpha$ per testare le ipotesi

$$H_0 : \varphi(x) = \varphi_0(x) \quad \text{contro} \quad H_1 : \varphi(x) = \varphi_1(x)$$

b) calcolare la funzione di potenza del test.