**Esame di Statistica II/B - 12.07.05**

**COGNOME__________________NOME__________________MATRICOLA____________**

**Esame totale          Esame parziale**

***Per la seconda prova parziale, svolgere soltanto il secondo ed il terzo esercizio.***

**1)** Si estrae un campione casuale di ampiezza $n$ da una v.c. normale di varianza unitaria, avente la seguente funzione di densità:

$$f(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2} \qquad -\infty < x < \infty, \quad \mu \in \Re$$

a) Ricavare lo stimatore $T$ di massima verosimiglianza per $E(X^2)$.

b) Verificare che $T$ è distorto per $E(X^2)$ e proporre un'opportuna "correzione".

c) Fattorizzare opportunamente la quantità $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln f(x_i;\mu)$, individuando la funzione parametrica $\tau^*(\mu)$ per la quale esiste lo stimatore a varianza uniformemente minima. Sulla base di questo risultato e senza effettuare ulteriori calcoli, stabilire se la varianza dello stimatore corretto di $E(X^2)$ determinato al punto b) può raggiungere il limite inferiore di Rao-Cramér, giustificando la risposta.

**2)** In un'indagine di mercato, un campione casuale di lettori di quotidiani a diffusione nazionale è stato classificato in base al tipo di quotidiano preferito (A, B o C) ed al ceto sociale (da povero a benestante):

| | **Quotidiano** | | |
|---|---|---|---|
| ***Ceto Sociale*** | **A** | **B** | **C** |
| *Povero* | 51 | 31 | 32 |
| *Medio-basso* | 18 | 26 | 31 |
| *Medio-alto* | 49 | 59 | 51 |
| *Benestante* | 2 | 4 | 6 |

Sulla base dei dati riportati in tabella,

a) si può ritenere che la preferenza per il tipo di quotidiano sia indipendente dal ceto sociale del lettore ($\alpha = 0{,}10$)?

b) costruire un intervallo di confidenza asintotico per la differenza fra le proporzioni di lettori del quotidiano A appartenenti al ceto "povero" e a quello "medio-alto" ($\alpha = 0{,}03$).

**3)** Su un campione casuale di 4 aziende farmaceutiche si sono registrati i seguenti valori di profitto (variabile $Y$, in migliaia di euro) e di spesa per la ricerca (variabile $X$, in migliaia di euro) per l'anno 2004:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ***Profitto*** | 55 | 60 | 42 | 51 |
| ***Spesa per ricerca*** | 44 | 51 | 37 | 50 |

$\sum x_i^2 = 8'406;\quad \sum y_i^2 = 10'990$

$\sum x_i y_i = 9'584$

Si vuole spiegare $Y$ in funzione di $X$ con un modello lineare (caso A).

a) Determinare la stima di massima verosimiglianza per il parametro $\beta_0$ del modello e costruire il relativo intervallo di confidenza al livello del 90%.

b) Verificare l'ipotesi nulla che il parametro $\beta_1$ sia pari ad 1 contro l'alternativa che risulti inferiore a tale valore, volendo commettere l'errore di prima specie con probabilità del 10%.

c) Costruire un intervallo di confidenza per il profitto medio di un'azienda farmaceutica la cui spesa in ricerca sia pari a 35'000 euro (livello di confidenza = 80%).