ESERCIZIO 1.

a) $$f(x;\beta) = \beta \cdot (1-x)^{-1} \cdot (1-x)^{\beta}$$
$$= \beta \cdot \frac{1}{1-x} \cdot e^{\beta \cdot \ln(1-x)}$$

$\in$ famiglia esponenziale con:

$a(\beta) = \beta$

$b(x) = \frac{1}{1-x}$

$c(\beta) = \beta$

$d(x) = \ln(1-x)$

b) $$\ln f(x_i;\beta) = \ln\beta + (\beta-1)\ln(1-x_i)$$
$$\ln \mathcal{L} = n\ln\beta + (\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)$$
$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial\beta} = \frac{n}{\beta} + \sum \ln(1-x_i) = 0$$
$$\rightarrow \hat{\beta}_{ML} = \frac{-n}{\sum \ln(1-x_i)} > 0$$

essendo $\ln(1-x_i) < 0$ per $x_i \in (0,1)$

c) $$\sum \frac{\partial \ln f}{\partial\beta} = \frac{n}{\beta} + \sum \ln(1-x_i)$$
$$= -n\left\{ -\frac{\sum \ln(1-x_i)}{n} - \underbrace{\frac{1}{\beta}}_{\tau^*(\beta)} \right\}$$

d) Per il principio di invarianza, lo stimatore di $\tau^*(\beta)$ è dato da:

$$T = \frac{1}{\hat{\beta}_{ML}} = -\frac{\sum \ln(1-x_i)}{n}$$

ESERCIZIO 2.

$$F(x) = \int_{0,75}^{x} 1,125\ t^{-3}\,dt = \frac{1,125}{-2}\left[t^{-2}\right]_{0,75}^{x}$$

$$= 1 - \frac{0,5625}{x^2}$$

$$\pi_J = \text{Prob}\ (a_J < X < b_J) = F(b_J) - F(a_J)$$

$$= 0,5625\left(\frac{1}{a_J^2} - \frac{1}{b_J^2}\right) \qquad 1 \le J \le 6$$

Calcoli:

$$\pi_1 = \text{Prob}\ (0,75 < X < 1) = 0,5625\left(\frac{1}{0,75^2} - 1\right) = 0,4375$$

$$\pi_2 = \text{Prob}\ (1 < X < 1,5) = 0,5625\left(1 - \frac{1}{1,5^2}\right) = 0,3125$$

$$\pi_3 = \text{Prob}\ (1,5 < X < 2,5) = 0,5625\left(\frac{1}{1,5^2} - \frac{1}{2,5^2}\right) = 0,16$$

$$\pi_4 = \text{Prob}\ (2,5 < X < 3) = 0,5625\left(\frac{1}{2,5^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 0,0275$$

$$\pi_5 = \text{Prob}\ (3 < X < 4) = 0,5625\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 0,02734$$

$$\pi_6 = \text{Prob}\ (X > 4) = 1 - F(4) = \frac{0,5625}{4^2} = 0,03516$$

$$\overline{1}$$

	π_J	$\hat{n}_J = 1000 \cdot \pi_J$	n_J	$\frac{(n_J - \hat{n}_J)^2}{\hat{n}_J}$
<1	0,4375	437,5	460	1,1571
1-1,5	0,3125	312,5	297	0,7688
1,5-2,5	0,16	160	153	0,30625
2,5-3	0,0275	27,5	37	3,2818
3-4	0,02734	27,34	20	1,9706
>4	0,03516	35,16	33	0,1327
	1	1000	1000	$7,5526 = X^2$

Valore critico: $\chi^2_{(K-1;\,1-\alpha)} = \chi^2_{(5;\,0,95)} = 11,1$

Essendo $X^2 < 11,1$

→ accetto il modello di Pareto

ESERCIZIO 3

OLIO	n_J	$\overline{X}_J$	Dev_J	$(\overline{X}_J - \overline{X})^2 \cdot n_J$
A	7	17,5714	109,9413	84,5634
B	8	13,4875	116,32875	2,9593
C	8	11,6625	140,57875	47,3637
	23	14,0957 ($\overline{X}$)	366,8488 ↑ DN	134,8864 ↑ DF

a) Ipotesi: normalità di X

$$\begin{cases} H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2 \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}05$$

$$V = \frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{109{,}9413/6}{116{,}32875/7} = \frac{18{,}32355}{16{,}61839} = 1{,}1026$$

↓

essendo > 1,
basta confrontarlo con $F_{(6,7;\,0,975)} = 5{,}12$

Poiché $V < 5{,}12 \rightarrow$ accetto H_0

b) Ipotesi: normalità di X
omogeneità varianze
indipendenza dei 3 campioni

ANALISI DELLA VARIANZA:

$$V = \frac{DF/(K-1)}{DN/(n-K)} = \frac{134{,}8864/2}{366{,}8488/20} = 3{,}6769$$

valore critico:

$F_{(2,20;\,0,90)} = 2{,}59 \rightarrow$ le 3 medie non possono ritenersi uguali

3) Ipotesi: normalità di X
omogeneità varianze A e C

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A - \mu_C = 0 \\ H_1 : \mu_A - \mu_C > 0 \end{cases} \qquad \alpha = 0,02$$

$$S^2_{POND} = \frac{Dev_A + Dev_C}{n_A + n_C - 2} = \frac{109,9413 + 140,57875}{7+8-2}$$

$$= \frac{250,52005}{13} = 19,2708$$

$$T = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_C}{\sqrt{S^2_{POND}\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_C}\right)}} = \frac{17,5714 - 11,6625}{\sqrt{19,2708\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}}$$

$$= \frac{5,9089}{2,27196} = 2,6008$$

$$C = \{T > t_{(13;\,0,95)}\} = \{T > 1,771\}$$

→ rifiuto H_0