CORREZIONE PROVA PARZIALE del 2.5.05

ESERCIZIO 1.

a) $Var(X) = \frac{1}{\theta^2} = \tau(\theta)$ funzione parametrica

STIMATORE ML:

$\ln f(x_i;\theta) = \ln\theta - \theta x_i$

$\ln L = n\ln\theta - \theta\sum x_i$

$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum x_i = 0 \longrightarrow \frac{1}{\theta} = \frac{\sum x_i}{n} = \overline{X}$

Quindi: $T = \widehat{\left(\frac{1}{\theta^2}\right)} = \overline{X}^2$

b) T è corretto per $Var(X)$ se $E(T) = \frac{1}{\theta^2}$

Verifica:

$E(T) = E(\overline{X}^2)$

$= Var(\overline{X}) + [E(\overline{X})]^2$ formula indiretta per il momento 2°

$= \frac{Var(X)}{n} + [E(X)]^2$

$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\theta^2} + \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2}\left(\frac{1}{n}+1\right) \neq \frac{1}{\theta^2}$

$\rightarrow$ T è distorto per $Var(X)$

"Correzione":

$\underbrace{\frac{n}{1+n}\cdot E(T)}_{} = \frac{1}{\theta^2}\cdot\frac{1+\cancel{n}}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{1+n}}$

$E\left(\frac{n}{1+n}T\right) = \frac{1}{\theta^2} \longrightarrow$ Lo stimatore $T' = \frac{n}{1+n}\cdot\overline{X}^2$ è corretto per $Var(X)$

c) Limite inferiore di Rao-Cramèr

NUM : $[\tau'(\theta)]^2 = \left(\frac{d}{d\theta}\frac{1}{\theta^2}\right)^2 = \left(-2\frac{1}{\theta^3}\right)^2 = \frac{4}{\theta^6}$

DEN : I. Con derivata prima

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} - X$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)^2 = \mathbb{E}\left(X - \frac{1}{\theta}\right)^2 = Var(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

II. Con derivata seconda

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\theta^2}$$

$$\mathbb{E}\left(-\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right) = \frac{1}{\theta^2}$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{4/\cancel{\theta^6}^{\,4}}{n \cdot \frac{1}{\cancel{\theta^2}}} = \frac{4}{n \cdot \theta^4}$$

d) Fattorizzazione:

$$\sum \frac{\partial \ln f}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum x_i = -n\Bigg(\underbrace{\frac{\sum x_i}{n}}_{T} - \underbrace{\frac{1}{\theta}}_{\tau^*(\theta)}\Bigg)$$

Essendo $Var(X) = \frac{1}{\theta^2}$ trasformato non lineare di $\tau^*(\theta) = \frac{1}{\theta}$,
il suo stimatore non distorto T' non può avere varianza uniformemente minima.

ESERCIZIO 2.

x_i	x_i^2	$(x_i - 0{,}1)^2$
-2,40	5,76	6,25
0,11	0,0121	0,0001
-0,20	0,04	0,09
0,44	0,1936	0,1156
0,53	0,2809	0,1849
-1,52	6,2867	6,6406 (punto ©)

$$\bar{X} = \frac{-1{,}52}{5} = -0{,}304$$

$$S'^2 = \frac{1}{4}\left(6{,}2867 - 5 \cdot (-0{,}304)^2\right) = 1{,}4561$$

a) Analista finanziario:

$$\bar{X} \pm 1{,}5$$

Intervallo di confidenza:

$$\bar{X} \pm t^{(4)}_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

Impostando l'equazione: $1{,}5 = t^{(4)}_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{1{,}4561}{5}}$

si determina il valore critico:

$$t^{(4)}_{(1-\frac{\alpha}{2})} = 1{,}5 \Big/ \sqrt{\frac{1{,}4561}{5}} = 2{,}7796$$

Sulle tavole della t per 4 gdl si trova il valore 2,776 corrispondente ad una probabilità cumulata di 0,975.

Pertanto, $1-\alpha/2 \cong 0,975$

da cui $\alpha \cong 0,05 \longrightarrow (1-\alpha) \cong 0,95$

livello di confidenza che si può attribuire alla affermazione dell'analista

b) $$I(\sigma)^{(0,90)} = \left\{ \sqrt{\frac{4 \cdot S^2}{\chi^2_{(4;0,95)}}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{4 \cdot S^2}{\chi^2_{(4;0,05)}}} \right\}$$

$$= \left\{ \sqrt{\frac{5,8245}{9,49}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{5,8245}{0,711}} \right\}$$

$$= \left\{ \sqrt{0,6138} \le \sigma \le \sqrt{8,1920} \right\}$$

$$= \left\{ 0,7834 \le \sigma \le 2,8622 \right\}$$

c) $$I(\sigma)^{(0,90)} = \left\{ \sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{(5;0,95)}}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{(5;0,05)}}} \right\}$$

$$= \left\{ \sqrt{\frac{6,6406}{11,1}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{6,6406}{1,15}} \right\}$$

$$= \left\{ \sqrt{0,5983} \le \sigma \le \sqrt{5,7744} \right\}$$

$$= \left\{ 0,7735 \le \sigma \le 2,4030 \right\}$$

→ intervallo + preciso grazie all'informazione aggiuntiva sul parametro μ.