CORREZIONE TEMA 9.4.05

ESERCIZIO 1.

a) Logverosimiglianza:

$$\ln \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\theta \cdot e^{-\theta x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln\theta - \theta x_i\right)$$

$$= n\ln\theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{1}^{n} x_i = 0 \longrightarrow \hat{\theta}_{ML} = \frac{n}{\sum x_i} = \frac{1}{\bar{X}}$$

$$\tau(\theta) = \text{Prob}\,(X > 2) = e^{-\theta \cdot 2} \quad \text{(retrocumulato)}$$

Per il principio di invarianza:

$$T = \tau(\hat{\theta}) = e^{-\hat{\theta}_{ML} \cdot 2} = e^{-\frac{2}{\bar{X}}}$$

b) $$L = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{m\,\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)^2\right]} \quad \text{oppure:} \quad \frac{[\tau'(\theta)]^2}{m\,\mathbb{E}\left(-\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right)}$$

NUMERATORE:

$$\tau'(\theta) = \frac{d}{d\theta} e^{-\theta \cdot 2} = e^{-\theta \cdot 2} \cdot (-2)$$

$$[\tau'(\theta)]^2 = 4 \cdot e^{-4\theta}$$

DENOMINATORE:

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} - X \longrightarrow \mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)^2 = \mathbb{E}\left(X - \frac{1}{\theta}\right)^2 = \text{Var}(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

oppure:

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2} = \frac{-1}{\theta^2} \longrightarrow \mathbb{E}\left(-\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right) = \mathbb{E}\left(-\left[-\frac{1}{\theta^2}\right]\right) = \frac{1}{\theta^2}$$

Quindi:

$$L = \frac{4e^{-4\theta}}{m \cdot \frac{1}{\theta^2}} = \frac{4\theta^2 e^{-4\theta}}{m}$$

c) Lo stimatore T ha distribuzione asintotica Normale di parametri $\mu = \tau(\theta) = e^{-\theta \cdot 2}$

e $\sigma^2 = L = \dfrac{4\theta^2 e^{-4\theta}}{n}$

ESERCIZIO 2.

a) Test χ^2 per indipendenza distributiva

TABELLA FREQUENZE TEORICHE $\hat{n}_{ij}$:

	0	1	2	>2	TOTALE
VACCINATO	260	144,375	76,875	18,75	500
NON VACC.	156	86,625	46,125	11,25	300
TOTALE	416	231	123	30	800

$(n_{ij} - \hat{n}_{ij})^2 / \hat{n}_{ij}$

	0	1	2	>2	
VACCINATO	0,2462	0,0027	0,4880	0,0833	
NON VACC.	0,4103	0,0045	0,8133	0,1389	
					2,1872

$\chi^2 = 2{,}1872$

valore critico: $\chi^2_{(r-1)(c-1);(1-\alpha)} = \chi^2_{1\cdot 3;\,0,95} = 7{,}815$

Essendo $\chi^2 < 7{,}815$, ritengo ($\alpha = 0{,}05$) che i due caratteri siano indipendenti → quindi il vaccino non modifica significativamente il n° di raffreddori contratti nel periodo indicato.

b) Test χ^2

$$\begin{cases} H_0: & X \sim \text{Poisson}(\lambda) \\ H_1: & X \not\sim \text{Poisson}(\lambda) \end{cases}$$ (sul campione dei vaccinati)

Essendo λ ignoto, lo stimo con:

$$\hat{\lambda} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum n_i \cdot x_i = \frac{1}{500}\left(0\cdot 252 + 1\cdot 145 + 2\cdot 83 + 84\right)$$

$= 0{,}79$

x_J	π_J	$\hat{n}_J$	n_J	$\frac{(n_J-\hat{n}_J)^2}{\hat{n}_J}$
0	0,4538	226,91	252	2,77
1	0,3585	179,25	145	6,54
2	0,1416	70,8	83	2,10
>2	0,0461	23,04	20	0,40
	1	500		11,81 $= \chi^2$

$\rightarrow \pi_J = \text{Prob}(X = x_J) = \dfrac{e^{-\lambda}\cdot \lambda^{x_J}}{x_J!}$ probabilità teoriche

- $\pi_0 = e^{-0{,}79}$
- $\pi_1 = e^{-0{,}79}\cdot 0{,}79$
- $\pi_2 = e^{-0{,}79}\cdot 0{,}79^2/2!$

$\text{Prob}(X>2) = 1-(\pi_0+\pi_1+\pi_2)$

$\rightarrow \hat{n}_J = 500\cdot \pi_J$

$\Rightarrow \chi^2 = 11{,}81$

valore critico: $\chi^2_{(k-1-s;\,1-\alpha)}$

$= \chi^2_{(4-1-1;\,0{,}99)} = 9{,}210$

Essendo $\chi^2 > 9{,}210$ si respinge il modello di Poisson ($\alpha = 0{,}01$).

ESERCIZIO 3.

a) $\begin{cases} H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_1: \sigma_A^2 \neq \sigma_B \end{cases}$

$$Dev_A = \sum x_{Ai}^2 - n_A \cdot \overline{X}_A^2 = 471,12 - 16 \cdot 4,6^2 = 132,56$$

$$Dev_B = \sum x_{Bi}^2 - n_B \overline{X}_B^2 = 751,77 - 21 \cdot 5,2^2 = 183,93$$

Statistica test:

$$V = \frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{Dev_A/(n_A-1)}{Dev_B/(n_B-1)} = \frac{132,56/15}{183,93/20} = \frac{8,8373}{9,1965} = 0,9609$$

Valori critici:

$$F_{n_A-1, n_B-1; 1-\alpha/2} = F_{15,20;0,995} = 3,50$$

$$F_{n_B-1, n_A-1; 1-\alpha/2} = F_{20,15;0,995} = 3,88$$

Regione di accettazione:

$$\left\{ \frac{1}{3,88} < V < 3,50 \right\} = \left\{ 0,2578 < V < 3,50 \right\}$$

Essendo $V = 0,9609$: si accetta H_0 $(\sigma_A^2 = \sigma_B^2)$ per $\alpha = 0,01$

b) ANALISI DELLA VARIANZA.

GRUPPO	n_J	$\overline{X}_J$	$(\overline{X}_J - \overline{X})^2 \cdot n_J$	Dev_J
A	16	4,6	11,8253	132,56
B	21	5,2	1,4163	183,93
C	30	6,1	12,2995	352,39
	67		25,5411	668,88

$$\overline{X} = \frac{1}{m} \cdot \sum n_J \overline{X}_J = \frac{1}{67}(16 \cdot 4,6 + 21 \cdot 5,2 + 30 \cdot 6,1) = 5,4597$$

$$V = \frac{DF/(K-1)}{DN/(m-K)} = \frac{25,5411/2}{668,88/64} = 1,2219$$

Valore critico: $F_{(2,60;\,0,95)} = 3,15$

Essendo $V < 3,15$, si possono ritenere i rendimenti uguali per i 3 pesticidi $(\alpha = 0,05)$.