SOLUZIONE TEMA 21.09.04

$\boxed{E1}$ Supposto $\sigma^2 = 1$, si ha:

$$f(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$$

ⓐ $$\ln f(x_i;\mu) = -\ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}(x_i-\mu)^2$$

$$\ln L = -n \ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \Sigma(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{1}{2} \cdot 2 \, \Sigma(x_i-\mu)\cdot(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma(x_i-\mu) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\mu} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \overline{X}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2} = \frac{\partial}{\partial \mu} \Sigma(x_i-\mu) = -n < 0$$

Per il principio di invarianza,

$$T_1 = \tau(\hat{\mu}) = \overline{X}^2$$

ⓑ $$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(\overline{X}^2) = Var(\overline{X}) + (\mathbb{E}\overline{X})^2$$

$$= \frac{1}{n} + \mu^2 \neq \mu^2 \rightarrow \text{distorto}$$

Uno stimatore corretto per $\tau(\mu) = \mu^2$ è:

$$T_2 = T_1 - \frac{1}{n} = \overline{X}^2 - \frac{1}{n}$$

(c) $L = \frac{[\tau'(\mu)]^2}{n\,E\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \mu}\right)^2} = \frac{(2\mu)^2}{n\,\underbrace{E\,(X-\mu)^2}_{Var\,X = 1}}$

$= \frac{4\mu^2}{n}$

(d) $\Sigma \frac{\partial \ln f}{\partial \mu} = \Sigma x_i - n\mu = n\left(\frac{\Sigma x_i}{n} - \mu\right)$

$\tau^*(\mu) \neq \mu^2$

→ lo stimatore T_1 non raggiunge il limite inf. di Rao-Cramèr

$\boxed{E2}$ (a) $\begin{cases} H_0: X \sim \mathcal{E}sp(\theta) \\ H_1: X \not\sim \mathcal{E}sp \end{cases}$

Stimatore di θ: $\frac{1}{\overline{X}}$

Calcolo di $\overline{X}$:

valori centrali x_j	1	2,5	4	5 e oltre
n_j	360	101	70	34
$x_j \cdot n_j$	360	252,5	280	210

$\overline{X} = \frac{\Sigma x_j \cdot n_j}{n} = \frac{1102,5}{565} = 1,9513$

$\hat{\theta} = \frac{1}{1,9513} = 0,5125$

Classi	π_j	$\hat{n}_j$	n_j	$\frac{(n_j-\hat{n}_j)^2}{\hat{n}_j}$
0-2	0,6412	362,278	360	0,0143
2-3	0,1439	81,3035	101	4,7717
3-5	0,1378	77,857	70	0,77857
5-∞	0,0771	43,5615	34	2,0987
TOT	1	565	565	7,6633 = X^2

$$\pi_1 = F_X(2) = 1 - e^{-\hat{\theta}\cdot 2} = 0{,}6412$$

$$\pi_2 = F_X(3) - F_X(2) = e^{-\hat{\theta}\cdot 2} - e^{-\hat{\theta}\cdot 3} = 0{,}3588 - 0{,}2149 = 0{,}1439$$

$$\pi_3 = F_X(5) - F_X(3) = e^{-\hat{\theta}\cdot 3} - e^{-\hat{\theta}\cdot 5} = 0{,}2149 - 0{,}0771 = 0{,}1378$$

$$\pi_4 = 1 - F_X(5) = 0{,}0771$$

Valore critico: $\chi^2_{(k-s-1;\,1-\alpha)} = \chi^2_{(2;\,0{,}95)} = 5{,}99$

Essendo $X^2 > 5{,}99$ rifiuto H_0:
il modello esponenziale non è adeguato

ⓑ $\hat{p} = \frac{360+101}{565} = 0{,}8159$

$$
\begin{aligned}
I(p, 1-\alpha/2) &= \hat{p} \pm z_{(1-\alpha/2)} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \\
&= 0{,}8159 \pm \underbrace{z_{(0{,}99)}}_{2{,}326} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{0{,}8159 \cdot 0{,}1841}{565}}}_{0{,}0163} \\
&= 0{,}8159 \pm 0{,}0379 \\
&= \{0{,}7780 ;\ 0{,}8538\}
\end{aligned}
$$

$\boxed{E3}$ ⓐ $\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\ H_1: \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} |\mu_i - \mu_j| > 0 \end{cases}$

Sede	n_j	$\overline{x}_j$	Dev_j	$(\overline{x}_j - \overline{x})^2 \cdot n_j$
N	10	13,7	103,1	27,556
C	8	12,5	70	1,6928
S	7	9,14	66,2228	58,87
	25		239,3228	88,1188

$\overline{x} = 12{,}04$

$DF = \sum_{j=1}^{3} (\overline{x}_j - \overline{x})^2 \cdot n_j = 88{,}1188 \quad [k-1=2]$

$DN = \sum_{j=1}^{3} Dev_j = 239{,}3228 \quad [n-k=22]$

$$V = \frac{88{,}1188/2}{239{,}3228/22} = 4{,}0502$$

$$F_{(2,22;\,0{,}95)} = 3{,}44$$

Essendo $V > 3{,}44 \rightarrow$ si rifiuta Ho: la spesa pubbl. media non è uguale nelle 3 aree geografiche

(b) $\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$

$$S_1^2 = \frac{103{,}1}{9} = 11{,}4556$$

$$S_2^2 = \frac{70}{7} = 10$$

$$S^2 = \frac{103{,}1 + 70}{16} = 10{,}8188$$

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{13{,}7 - 12{,}5}{\sqrt{10{,}8188\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{8}\right)}}$$

$$= 0{,}7691 \qquad t_{(16;\,0{,}975)} = 2{,}12$$

Essendo $|T| < 2{,}12$ accetto $H_0: \mu_1 = \mu_2$, quindi il risultato del punto (a) è dovuto ad una diversità di spesa pubblicitaria media nel Sud&Isole rispetto alle altre 2 aree.