

COGNOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ MATRICOLA \_\_\_\_\_

- 1) Sia  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , un campione casuale di ampiezza  $n$  estratto da una v.c.  $X$  avente funzione di densità normale:

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad x \in \mathfrak{R}$$

Supposto  $\sigma^2$  noto e pari a 1,

- Si determini lo stimatore  $T_I$  per la funzione parametrica  $\tau(\mu) = \mu^2$  con il metodo della massima verosimiglianza.
- Si verifichi se  $T_I$  è corretto per  $\tau(\mu)$  e, qualora non lo fosse, se ne ricavi uno stimatore corretto.
- Si calcoli il limite inferiore di Rao-Cramèr per la varianza di stimatori non distorti di  $\tau(\mu)$ .
- Si fattorizzi opportunamente la quantità:  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \mu} \ln f(x_i; \mu)$ , individuando la funzione parametrica  $\tau^*(\mu)$  per la quale esiste uno stimatore non distorto la cui varianza coincide con il limite inferiore di Rao-Cramèr. Sulla base di questo risultato e senza effettuare ulteriori calcoli, si dica se lo stimatore  $T_I$  determinato al punto a) può raggiungere tale limite, motivando la risposta.

- 2) Un campione casuale di dipendenti della “Snam Rete Gas” è stato classificato in base al carattere  $X =$  anzianità di lavoro (in anni) presso la società:

Intervallo valori $x_j$	0 – 2	2 – 3	3 – 5	5 e oltre
Frequenza $n_j$	360	101	70	34

- Sapendo che la somma dei valori della classe “5 e oltre” è pari a 210, si verifichi ( $\alpha = 0,05$ ) se la distribuzione di  $X$  può essere adeguatamente descritta dal modello *esponenziale*:  

$$f(x; \theta) = \vartheta e^{-\theta x} \quad \text{per } x > 0 \quad \vartheta > 0$$
  - Si costruisca un intervallo di confidenza asintotico, al livello di confidenza del 98%, per la proporzione di dipendenti con anzianità di lavoro inferiore ai tre anni.
- 3) In uno studio di marketing, le aziende italiane operanti nel settore dell’abbigliamento sono state suddivise in base alla loro sede geografica. Per inferire sulla spesa pubblicitaria mensile ( $X$ , in migliaia di Euro) di queste aziende, sono stati estratti tre campioni indipendenti, relativi a società aventi sede rispettivamente nel Nord, nel Centro e nel Sud&Isole, ottenendo le informazioni sintetizzate in tabella:

Sede geografica	$n_j$	$\sum_{i=1}^{n_j} x_{ji}$	$\sum_{i=1}^{n_j} x_{ji}^2$
Nord	10	137	1980
Centro	8	100	1320
Sud&Isole	7	64	651

Dopo avere specificato le necessarie ipotesi,

- Si verifichi se la spesa pubblicitaria media può ritenersi equivalente per le aziende ubicate nelle tre diverse aree geografiche ( $\alpha = 0,05$ ).
- Si verifichi l'ipotesi che la spesa pubblicitaria media sia uguale al Nord e al Centro contro l'alternativa bilaterale ( $\alpha = 0,05$ ), commentando il risultato in rapporto a quanto ottenuto al punto a).