**Esame di Statistica II/B - 07.09.04**

**COGNOME**___________________ **NOME**___________________**MATRICOLA**____________

**Esame totale** **Esame parziale**

| ***Coloro che sostengono la seconda prova parziale svolgano solo il <u>secondo</u> e il <u>terzo</u> esercizio.*** |
|---|

**1)** Si consideri un campione casuale di ampiezza $n$ da una variabile $X$ avente funzione di densità di tipo Beta:

$$f(x;\theta) = \theta\, x^{\theta-1} \qquad per\ 0 < x < 1;\ \ \theta > 0\,.$$

a) Si verifichi se la distribuzione assegnata appartiene alla famiglia esponenziale.

b) Si ricavi lo stimatore $T_1$ per il parametro θ con il metodo dei momenti.

c) Si ricavi lo stimatore $T_2$ per il parametro θ con il metodo della massima verosimiglianza.

d) Si fattorizzi opportunamente la quantità: $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x_i;\theta)$, individuando la funzione parametrica $\tau^*(\theta)$ per la quale esiste uno stimatore non distorto la cui varianza coincide con il limite inferiore di Rao-Cramèr. Sulla base di questo risultato e senza effettuare ulteriori calcoli, si dica se lo stimatore $T_2$ determinato al punto c) può raggiungere tale limite, motivando la risposta.

**2)** Un distributore di bevande calde è regolato in modo che la quantità media di caffè erogata in un bicchierino sia pari a 10 *cl*. Su un campione casuale di 10 bicchierini, la quantità media di caffè è risultata pari a 9,55 *cl*. Supponendo che la quantità di caffè erogata segua una distribuzione normale di media $\mu$ (incognita) e varianza $\sigma^2$ pari a 2,25,

a) Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0$: $\mu = 10$ contro l'alternativa $H_1$: $\mu < 10$ ad un livello di significatività del 5%.

b) Se la quantità media erogata fosse pari a $\mu = 9{,}4$, quale sarebbe la probabilità di accettare l'ipotesi nulla (in base alla regione critica determinata al punto precedente)?

c) Si determini la funzione di potenza del test ricavato al punto a) in corrispondenza dell'ipotesi alternativa $\mu = 9{,}6$, commentando il risultato.

**3)** La Camera di Commercio di Vicenza ha svolto un'indagine statistica su alcune imprese del Nord-Est d'Italia per verificare l'incidenza del grado di "informatizzazione" sul fatturato globale, ipotizzando un modello lineare (*caso A*): $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$, dove $Y$ indica il fatturato (in milioni di euro) ed $x$ la quota (%) d'investimento destinata alle tecnologie informatiche. I seguenti valori si riferiscono ad un campione casuale di 10 imprese appartenenti allo stesso settore produttivo:

$$\sum x_i = 106{,}39; \quad \sum y_i = 132{,}37; \quad \sum x_i y_i = 1879{,}07; \quad \sum x_i^2 = 1652{,}44; \quad \sum y_i^2 = 2239{,}96$$

Dopo avere stimato i parametri del modello,

a) Si verifichi se $\beta_1$ può ritenersi significativamente diverso da zero, volendo commettere l'errore di prima specie con probabilità dell'1%.

b) Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0$: $\beta_0 = 3{,}5$ contro l'alternativa $H_1$: $\beta_0 > 3{,}5$, volendo commettere l'errore di prima specie con probabilità del 5%.

c) Si costruisca un intervallo di confidenza al 98% per $\mu(x)$ in corrispondenza di $x = 10{,}2$.