Esame di Statistica II/B - 06.07.04

COGNOME___________________ **NOME**___________________**MATRICOLA**____________

Esame totale **Esame parziale**

Coloro che sostengono la seconda prova parziale svolgano solo il <u>secondo</u> e il <u>terzo</u> esercizio.

1) Si consideri un campione casuale di ampiezza n da una variabile X avente distribuzione di Pareto, con funzione di densità:

$$f(x; x_0, \theta) = \vartheta\, x_0^{\theta}\, x^{-(\theta+1)} \qquad per\ x \geq x_0;\ \ \vartheta > 0.$$

Si supponga x_0 noto e pari a 1.

a) Si verifichi se la distribuzione assegnata appartiene alla famiglia esponenziale.

b) Si ricavi lo stimatore T_1 per la funzione parametrica $\frac{1}{\theta}$ con il metodo della massima verosimiglianza.

c) Si ricavi lo stimatore T_2 per la mediana di X con il metodo della massima verosimiglianza.

d) Si fattorizzi opportunamente la quantità $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x_i;\theta)$, individuando la funzione parametrica $\tau^*(\theta)$ per la quale esiste uno stimatore la cui varianza coincide con il limite inferiore di Rao-Cramèr. Sulla base di questo risultato, si dica se uno degli stimatori determinati ai punti b) e c) può raggiungere tale limite, motivando la risposta.

2) Il management di una società, chiamato a scegliere fra tre diversi piani pensionistici per i lavoratori, vuole sapere se la preferenza per un particolare tipo di piano (X) è influenzata dalla posizione contrattuale del lavoratore (Y). A tal fine, promuove un'indagine campionaria su 500 lavoratori, raccogliendo i risultati riportati in tabella:

Posizione lavoratore	***Piano pensionistico***		
	A	***B***	***C***
Dipendente	150	140	60
A progetto	50	60	40

a) Si può ritenere che la preferenza per il tipo di piano pensionistico sia indipendente dalla posizione del lavoratore ($\alpha = 0{,}05$)?

b) Si costruisca un intervallo di confidenza asintotico al 99% per la differenza fra le proporzioni di lavoratori dipendenti e a progetto che hanno dichiarato di preferire il piano B.

3) Si consideri il seguente insieme di valori:

Y	26	28	27	31	22	21
X	38	31	27	25	14	12

Volendo applicare il modello lineare (*caso A*): $\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 x$,

a) Si stimino i parametri del modello.

b) Si verifichi se β_1 può ritenersi significativamente diverso da zero, volendo commettere l'errore di prima specie con probabilità del 5%.

c) Si determini l'intervallo di confidenza al 90% per $\mu(x)$ in corrispondenza di $x = 40$.