

Esame di Statistica II/B – 23.04.04
(Prova parziale)

COGNOME _____ **NOME** _____ **MATRICOLA** _____

1. Sia X_1, X_2, \dots, X_n , un campione casuale di ampiezza n estratto da una v.c. avente la seguente funzione di densità:

$$f(x; \theta) = \frac{\theta}{x^2} e^{-\frac{\theta}{x}} \quad \text{per } x > 0; \theta > 0$$

- a) Verificare se la v.c. assegnata appartiene alla famiglia esponenziale ad un parametro.
- b) Determinare lo stimatore T di massima verosimiglianza per la funzione parametrica $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$.
- c) Sapendo che la v.c. $Y = \frac{1}{\bar{X}}$ segue una distribuzione esponenziale di parametro θ , valutare la correttezza e la consistenza quadratica dello stimatore T ricavato al punto b).
- d) Calcolare il limite inferiore di Rao-Cramèr per la varianza di uno stimatore non distorto della funzione parametrica $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$ e confrontare tale limite con l'errore quadratico medio di T , commentando il risultato.
- e) Fattorizzare opportunamente la quantità $\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x_i; \theta)$, individuando la funzione parametrica $\tau^*(\theta)$ per la quale esiste uno stimatore non distorto la cui varianza coincide con il limite inferiore della disuguaglianza di Rao-Cramèr. Giustificare il risultato ottenuto al punto d).

2. Alle elezioni comunali per il Comune A, si presentano 2 coalizioni politiche, indicate, rispettivamente, con C1 e C2. Nel corso della giornata elettorale, il sindaco decide di effettuare un *exit-poll* estraendo un campione casuale di 400 elettori (in parte uomini e in parte donne) dalla popolazione dei 30.000 elettori del Comune. I voti degli elettori coinvolti nell'*exit-poll* sono riportati in tabella:

	<i>Coalizione C1</i>	<i>Coalizione C2</i>
<i>Elettori Uomini</i>	114	116
<i>Elettori Donne</i>	74	96

Indicata con p la frequenza relativa degli elettori che hanno *complessivamente* votato per la coalizione C1,

- a) costruire un intervallo di confidenza asintotico al livello di confidenza del 95% per p ;
- b) quale dovrebbe essere la numerosità complessiva del campione coinvolto nell'*exit-poll* affinché l'incognita frequenza relativa p di elettori della coalizione C1 sia stimata con una precisione del $\pm 2\%$ ad un livello di confidenza del 99% ?