Esame di Statistica II/B 11.09.03

COGNOME__________________ NOME_________________MATRICOLA_________

1) Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$, un campione casuale di ampiezza n estratto da una v.c. avente la seguente funzione di densità:

$$f(x;\alpha) = 2\,\alpha x\, e^{-\alpha x^2} \qquad \text{per } x \geq 0; \quad \alpha > 0$$

a) Ricavare lo stimatore T di massima verosimiglianza per la funzione parametrica $1/\alpha$.

b) Fattorizzare la quantità $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\alpha} \ln f(x_i;\alpha)$ individuando la funzione parametrica $\tau(\alpha)$ per la quale esiste uno stimatore a varianza uniformemente minima.

Sapendo che la v.c. $Y = X^2$ segue una distribuzione esponenziale di parametro α,

c) verificare la correttezza dello stimatore T trovato al punto a;

d) calcolare il limite inferiore di Rao-Cramér per la varianza di stimatori non distorti della funzione parametrica $1/\alpha$. La varianza dello stimatore T raggiunge tale limite? Giustificare la risposta.

2) Al fine di controllare il rendimento di un primo fertilizzante per il grano, sono state esaminate le quantità X di grano prodotte da un campione di $n_1 = 10$ appezzamenti standard di terreno, rilevando una media campionaria $\bar{x}_1 = 30$ (quintali per ettaro) ed una devianza campionaria $d_1 = \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 = 16{,}02$.

Un secondo fertilizzante, provato su un diverso campione di $n_2 = 13$ appezzamenti standard di terreno, ha invece dato i seguenti risultati: $\bar{x}_2 = 33{,}5$ e $d_2 = \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = 17{,}16$.

Dopo avere specificato le necessarie ipotesi,

a) verificare se la varianza delle quantità di grano prodotte con i due fertilizzanti è la stessa al livello di significatività del 10%;

b) costruire un intervallo di confidenza al 98% per la differenza fra le quantità medie di grano prodotte con i due fertilizzanti.

3) La relazione fra il reddito familiare annuo (variabile X) e la spesa per viaggi (variabile Y), può essere descritta dal seguente modello lineare (caso A):

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 X$$

Su un campione di $n = 10$ famiglie, si sono osservati i seguenti risultati (dati in migliaia di euro):

$$\sum x_i = 328 \qquad \sum y_i = 30{,}4 \qquad \sum x_i y_i = 1345{,}15 \qquad \sum x_i^2 = 13'325{,}18 \qquad \sum y_i^2 = 146{,}08$$

a) Ricavare un intervallo di confidenza al 90% per il coefficiente angolare β_1.

b) Verificare l'ipotesi unilaterale H_0: $\beta_0 \leq 0$ contro H_1: $\beta_0 > 0$ ad un livello di significatività del 5%.

c) Trovare un intervallo di confidenza al 95% per la spesa per viaggi di una famiglia il cui reddito annuo sia pari a 50 mila euro.