Università degli Studi di Milano-Bicocca Facoltà di Economia

Matematica Generale Modulo B

15 Luglio 2003

Esercizio 1

1. Dare la definizione di rango di una matrice. Enunciare il Teorema di Rouchè-Capelli.
2. a. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e il vettore $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, verificare che $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
   b. Risolvere il sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
   c. Sfruttando i risultati dei punti (a) e (b), determinare tutte le soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Esercizio 2

1. Enunciare almeno una condizione sufficiente, ma non necessaria, affinchè una funzione f, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, sia integrabile secondo Riemann in $[a,b]$.
2. Provare con un esempio che la condizione enunciata al punto (1) è solo sufficiente affinchè una funzione sia Riemann-integrabile.
3. Data la funzione $F(x) = \int_1^x \frac{3 - e^{-2t}}{e^{-t}} dt$, scrivere l'equazione della retta tangente a $F(x)$ nel punto $x_0 = \ln 3$.

Esercizio 3

1. Dare la definizione di successione monotona decrescente/non crescente.
2. Enunciare il criterio del confronto per le serie.
3. Stabilire il carattere della seguente serie:
   $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{(1/n)}}{\sqrt{n+1}}$.

Università degli Studi di Milano-Bicocca Facoltà di Economia

Matematica Generale Modulo B

15 Luglio 2003

Esercizio 1

1. Dare la definizione di matrice inversa. Enunciare una condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità di una matrice.
2. **a.** Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e il vettore $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, verificare che $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
   b. Risolvere il sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
   c. Sfruttando i risultati dei punti (a) e (b), determinare tutte le soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Esercizio 2

1. Enunciare almeno una condizione sufficiente, ma non necessaria, affinchè una funzione f, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, sia integrabile secondo Riemann in $[a,b]$.
2. Provare con un esempio che la condizione enunciata al punto (1) è solo sufficiente affinchè una funzione sia Riemann-integrabile.
3. Data la funzione $F(x) = \int_1^x \frac{2-e^{-2t}}{e^{-t}} dt$, scrivere l'equazione della retta tangente a $F(x)$ nel punto $x_0 = \ln 4$.

Esercizio 3

1. Dare la definizione di successione monotona crescente/ non decrescente.
2. Enunciare il criterio del confronto asintotico per le serie.
3. Stabilire il carattere della seguente serie:
   $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)e^{(1/n^2)}}{\sqrt{n}}$.