COGNOME: **NOME:** **MATRICOLA:**

Firma:

Università degli Studi di Milano / Bicocca – Facoltà di Economia

MATEMATICA GENERALE Modulo II EcoCom E-O/P-Z (Prof.ssa G.Carcano)

Prima prova parziale – 6 aprile 2006

Tempo a diposizione: 1 ora e 30 minuti

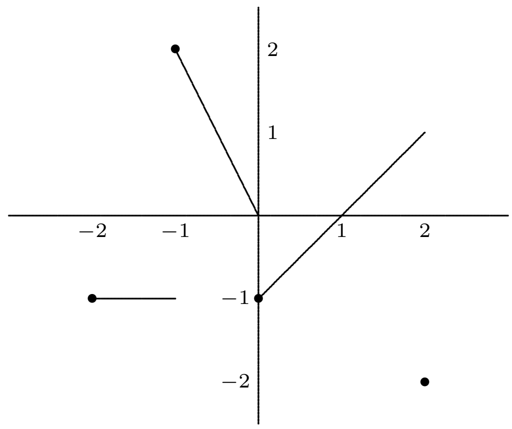
Per le domande numero 1-2-3-4-5-6-7:
una ed una sola delle quattro risposte è esatta; indicarla barrandola con una croce.
Ogni risposta esatta vale 3 punti; ogni risposta sbagliata o mancante vale 0 punti.

Per la domanda numero 8:
riportare lo svolgimento nello spazio bianco predisposto; il punteggio è indicato.

Totale punti disponibili (in trentesimi): **21 + 12 = 33**.

Attenzione: è ammessa una sola correzione, per le domande 1-2-3-4-5-6-7; per correggere una risposta ritenuta errata, scrivere NO sopra la risposta ritenuta errata e scrivere SI sopra la risposta ritenuta giusta.

1. Si consideri la funzione $f : [-2, 2] \to I\!R$, il cui grafico è



Quale delle seguenti affermazioni **non** è vera?

$\boxed{a}$ $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$;

$\boxed{b}$ il valor medio di f in $[-2, 2]$ è 0 ;

$\boxed{c}$ $\displaystyle\int_{-2}^{2} |f(x)|dx = 3$;

$\boxed{d}$ $\nexists x_0 \in [-2, 2]$ tale che $f(x_0) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

2. Quale delle seguenti funzioni $f : [-1, 1] \to I\!R$ è Riemann-integrabile in $[-1, 1]$?

$\boxed{a}$ $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 0 < x \le 1 \end{cases}$;

$\boxed{b}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } -1 \le x < 0 \\ -x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \end{cases}$;

$\boxed{c}$ $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{se } 0 < x \le 1 \end{cases}$;

$\boxed{d}$ $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -1 \le x < 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{se } 0 \le x \le 1 \end{cases}$.

3. Quale delle seguenti affermazioni è **vera**?

$\boxed{a}$ la successione $a_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}}$ non è convergente;

$\boxed{b}$ la successione $a_n = \dfrac{n^2+n-1}{n+2}$ è limitata;

$\boxed{c}$ la successione $a_n = n^2 - 8n$ è definitivamente monotona strettamente crescente;

$\boxed{d}$ la successione $a_n = \begin{cases} e^n & \text{se } n \text{ pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$ è convergente.

4. Quale delle seguenti affermazioni **non** è vera?

$\boxed{a}$ $\dfrac{1}{\sqrt{e}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$;

$\boxed{b}$ $\log 2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$;

$\boxed{c}$ $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$, $\forall x \in (-1, 1]$;

$\boxed{d}$ $e^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5. Si consideri la successione definita per ricorrenza $\begin{cases} a_0 \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = (a_n)^3 \end{cases}$; quale delle seguenti affermazioni è **vera**? $\boxed{a}$ $\{a_n\}$ è divergente, per ogni $a_0 > 0, a_0 \neq 1$; $\boxed{b}$ $\{a_n\}$ è divergente se e solo se $|a_0| > 1$; $\boxed{c}$ $\{a_n\}$ è convergente se e solo se $0 \leq a_0 \leq 1$; $\boxed{d}$ $\{a_n\}$ è oscillante se $a_0 < 0$.

6. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitata; $S(\mathcal{P}, f)$ / $s(\mathcal{P}, f)$ indichi la somma superiore / inferiore di f relativa alla partizione $\mathcal{P}$; quale delle seguenti affermazioni è **vera**?

$\boxed{a}$ $s(\mathcal{P}, f) < S(\mathcal{P}, f)$;

$\boxed{b}$ $s(\mathcal{P}, f) = S(\mathcal{P}, f)$;

$\boxed{c}$ $\sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P}, f) = \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}, f)$;

$\boxed{d}$ f continua $\Rightarrow$ $\sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P}, f) = \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}, f)$.

7. Sia $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$; allora $F'(\sqrt{3}) =$

$\boxed{a}$ 1; $\boxed{b}$ 0; $\boxed{c}$ $\dfrac{1}{2}$; $\boxed{d}$ nessuna delle tre.

8.

(i) Si enuncino almeno due criteri sufficienti per la convergenza di una serie numerica **(2 punti)**; si enunci e dimostri la condizione necessaria di convergenza per una serie numerica **(4 punti)**.

Criteri:

Enunciato condizione necessaria:

Dimostrazione:

(ii) In dipendenza dal parametro reale x, si determini il carattere della serie sottoscritta **(4 punti)**; in caso di serie convergente, se ne calcoli la somma **(2 punti)**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2x-1}{3-x} \right)^n$$

COGNOME: **NOME:** **MATRICOLA:**

Firma:

Università degli Studi di Milano / Bicocca – Facoltà di Economia

MATEMATICA GENERALE Modulo II EcoCom E-O/P-Z (Prof.ssa G.Carcano)

Prima prova parziale – 6 aprile 2006

Tempo a diposizione: 1 ora e 30 minuti

Per le domande numero 1-2-3-4-5-6-7:
una ed una sola delle quattro risposte è esatta; indicarla barrandola con una croce.
Ogni risposta esatta vale 3 punti; ogni risposta sbagliata o mancante vale 0 punti.

Per la domanda numero 8:
riportare lo svolgimento nello spazio bianco predisposto; il punteggio è indicato.

Totale punti disponibili (in trentesimi): **21 + 12 = 33**.

Attenzione: è ammessa una sola correzione, per le domande 1-2-3-4-5-6-7; per correggere una risposta ritenuta errata, scrivere NO sopra la risposta ritenuta errata e scrivere SI sopra la risposta ritenuta giusta.

---

1. Quale delle seguenti affermazioni **non** è vera?

$\boxed{a}$ $\dfrac{1}{\sqrt{e}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$;

$\boxed{b}$ $\log 2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$;

$\boxed{c}$ $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$, $\quad \forall x \in (-1, 1]$;

$\boxed{d}$ $e^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$, $\quad \forall x \in I\!R$.

2. Quale delle seguenti affermazioni è **vera**?

$\boxed{a}$ la successione $a_n = n^2 - 4n$ non è definitivamente monotona strettamente crescente;

$\boxed{b}$ la successione $a_n = \begin{cases} \log n & \text{se } n \text{ dispari} \\ 1 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$ è convergente;

$\boxed{c}$ la successione $a_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}}$ è divergente;

$\boxed{d}$ la successione $a_n = \dfrac{n^2 - 2n + 1}{2n + 1}$ non è limitata.

3. Quale delle seguenti funzioni $f : [-1, 1] \to I\!R$ è Riemann-integrabile in $[-1, 1]$?

$\boxed{a}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ x & \text{se } -1 \le x < 0 \end{cases}$;

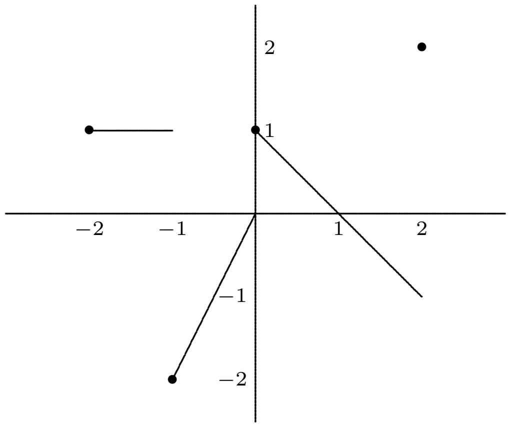
$\boxed{b}$ $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } -1 \le x < 0 \end{cases}$;

$\boxed{c}$ $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se } 0 < x \le 1 \\ e^x & \text{se } -1 \le x \le 0 \end{cases}$;

$\boxed{d}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } 0 < x \le 1 \\ -x & \text{se } -1 \le x \le 0 \end{cases}$.

4. Si consideri la successione definita per ricorrenza $\begin{cases} a_0 \in I\!R \\ a_{n+1} = (a_n)^3 \end{cases}$; quale delle seguenti affermazioni è **vera**? $\boxed{a}$ $\{a_n\}$ è divergente, per ogni $a_0 > 0, a_0 \neq 1$; $\boxed{b}$ $\{a_n\}$ è convergente se e solo se $0 \leq a_0 \leq 1$; $\boxed{c}$ $\{a_n\}$ è divergente se e solo se $|a_0| > 1$; $\boxed{d}$ $\{a_n\}$ è oscillante se $a_0 < 0$.

5. Si consideri la funzione $f : [-2, 2] \to I\!R$, il cui grafico è



Quale delle seguenti affermazioni **non** è vera?

$\boxed{a}$ $\displaystyle\int_{-2}^{2} |f(x)|dx = 3$;

$\boxed{b}$ $\displaystyle\nexists x_0 \in [-2, 2]$ tale che $f(x_0) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx$;

$\boxed{c}$ $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$;

$\boxed{d}$ il valor medio di f in $[-2, 2]$ è 0 ;

6. Sia $f : [a, b] \to I\!R$, limitata; $S(\mathcal{P}, f)$ / $s(\mathcal{P}, f)$ indichi la somma superiore / inferiore di f relativa alla partizione $\mathcal{P}$; quale delle seguenti affermazioni è **vera**?

$\boxed{a}$ f monotona $\Rightarrow$ $\sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P}, f) = \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}, f)$;

$\boxed{b}$ $s(\mathcal{P}, f) < S(\mathcal{P}, f)$;

$\boxed{c}$ $s(\mathcal{P}, f) = S(\mathcal{P}, f)$;

$\boxed{d}$ $\sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P}, f) = \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}, f)$.

7. Sia $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} \log\sqrt{1 + t^2}\,dt$; allora $F'(\sqrt{5}) =$

$\boxed{a}$ $\log 6$; $\boxed{b}$ nessuna delle tre; $\boxed{c}$ 1; $\boxed{d}$ 0.

8.

(i) Si enuncino almeno due criteri sufficienti per la convergenza di una serie numerica **(2 punti)**; si enunci e dimostri la condizione necessaria di convergenza per una serie numerica **(4 punti)**.

Criteri:

Enunciato condizione necessaria:

Dimostrazione:

(ii) In dipendenza dal parametro reale x, si determini il carattere della serie sottoscritta **(4 punti)**; in caso di serie convergente, se ne calcoli la somma **(2 punti)**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4x-1}{3-x} \right)^n$$