MATEMATICA GENERALE (mod. A)

prof. Annaratone

3 Febbraio 2004

1) i) Enunciare e dimostrare il teorema di permanenza del segno per i limiti di funzioni.

ii) Enunciare una condizione necessaria per l'esistenza di asintoti obliqui per una funzione $f:\Re \to \Re$.

iii) Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + |x^3|}{x^2 + 3}$$

a) Stabilire se esistono asintoti verticali, orizzontali e obliqui e qualora esistano calcolarli.

b) Calcolare la retta tangente alla funzione $y = f(x)$ in $x = -1$.

2) i) Enunciare una condizione necessaria per l'esistenza di massimi e minimi relativi per una funzione $f:[2,+\infty) \to \Re$.

ii) Sia $f:[2,+\infty) \to \Re$ derivabile in $[2,+\infty)$ escluso al più il putno $x = 3$ e sia $f'(x) > 0$ per $x > 3$ e $f'(x) < 0$ per $x < 3$. E' possibile concludere che $x = 3$ è un punto di minimo realtivo per la funzione f? Giustificare la risposta.

iv) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 2x - x^2 & x \le 3 \\ (x-3)e^{-2x} & x > 3 \end{cases}$$

a) Stabilire se è continua nel suo campo di esistenza.

b) Calcolarne i massimi e minimi relativi e assoluti nel suo campo di esistenza.

$$f(x)=\sqrt{4x^2+1}-x^2$$

e tracciarne un grafico qualitativo (insieme di definizione, limiti agli estremi dell'insieme di definizione, eventuali asintoti, derivabilità, eventuali punti estremanti; non è richiesto lo studio della convessità).
Calcolare il Polinomio di McLaurin della funzione $f(x)$ arrestato al quart'ordine.
Utilizzando questo risultato calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x^2+1}-x^2-e^{x^2}}{2\cos x+x^2-2}$$

2) Data la matrice

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -2 & 2k & k\\ k & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Discutere al variare del parametro k la risolubilità del sistema

$$A\underline{x}^T=(-2,3k,1)^T$$

Risolvere il sistema per $k = 1$.

3) Dare la definizione di continuità e derivabilità in un punto per una funzione reale di variabile reale. Dimostrare che la continuità in un punto è condizione necessaria, ma non sufficiente per la derivabilità in quel punto.
Data la funzione

$$f(x)=\begin{cases}k^2\operatorname{sen}x+he^{x^2} & x\le 0\\ \dfrac{2x+1}{k^2x+1} & x>0\end{cases}$$

Si stabilisca per quali valori di h e k risulta
a) continua
b) derivabile

4) Dare la definizione di primitiva di una funzione. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.
Calcolare l'integrale definito

$$\int_2^3 \ln(x^2-1)\,dx$$

e stabilire se esiste l'integrale improprio

$$\int_1^3 \ln(x^2-1)\,dx$$