SER-T1-003-***Appunti***

SERIE DI FUNZIONI

CONVERGENZA PUNTUALE DI UNA SERIE DI FUNZIONI:→

Se per ogni x di T la serie

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots\ldots + f_n(x) + \ldots\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \varphi(x)$$

è convergente, la serie stessa si dice convergente in T, o anche puntualmente convergente in T.

La definizione di convergenza puntuale coincide, con i relativi criteri di convergenza, con quella valida per le serie numeriche.

Esiste poi la convergenza uniforme di una serie di funzioni puntualmente convergente: tale condizione è più restrittiva e la definizione è più complessa (vedi altri appunti).

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER UNIFORME CONVERGENZA (Weierstrass)→

Se risulta, al variare di x in T (T= insieme di puntuale convergenza)

$$\left|f_n(x)\right| \le c_n \quad \rightarrow \quad -c_n \le f_n(x) \le c_n$$ con c_n costante positiva

e se la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ è convergente allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in T

Nota: La serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge puntualmente nell'intervallo aperto $(-1;1)$ ed ha per somma $\frac{1}{1-x}$. In tale intervallo non è però uniformemente convergente in quanto se lo fosse dovrebbe convergere anche nei suoi punti di accumulazione -1 e 1 e invece in questi punti la serie non converge. In qualunque altro sottointervallo come ad esempio $\left[-\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right]$ la serie converge uniformemente.

<u>Esempio</u>:

data la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^n$ stabilire l'insieme di convergenza puntuale e dire se c'è convergenza uniforme.

Corrisponde alla serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ che converge se $-1<q<1$ quindi

$$-1<\frac{x}{x^2+1}<1 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}<1 \\ -1<\dfrac{x}{x^2+1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-x^2-1}{x^2+1}<0 \\ 0<\dfrac{x^2+1+x}{x^2+1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2-x+1>0 \\ x^2+x+1>0 \end{cases} \rightarrow \forall x$$

La serie di funzioni converge puntualmente per qualsiasi valore di x.

La serie di funzioni converge anche uniformemente. Studiando la funzione $y=\frac{x}{x^2+1}$ possiamo notare che essa assume tutti i valori dell'intervallo $\left[-\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right]$

(tale funzione è dispari, ha il max in (1,1/2), passa per zero ed è asintotica all'asse delle x quando x tende all'infinito)

Pertanto per quanto visto prima sulle serie geometriche possiamo affermare l'uniforme convergenza.

Inoltre potremmo utilizzare il criterio di Weierstrass→

Risultando, al variare di x in T=(-∞;+∞) (T= insieme di puntuale convergenza)

$-\left(\frac{1}{2}\right)^n \le \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ed essendo la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ convergente, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^n$ converge uniformemente in T.

Se la somma di una serie di funzioni continue è una funzione discontinua, la serie non converge uniformemente

Esempio:

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)x^n$ converge puntualmente per $0 \le x \le 1$ risultando

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)x^n = \begin{cases}(1-x)\dfrac{1}{1-x} & \text{se} \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 1\end{cases}$$

La somma $\varphi(x)$ è discontinua nel punto $x=1$ perciò la serie non converge uniformemente nell'intervallo $[0;1]$

nota→

Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in T e $g(x)$ è limitata in T

allora anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\cdot g(x) = g(x)\cdot\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in T

nota→

Se le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ convergono uniformemente in T anche le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \pm g_n(x)$ convergono uniformemente in T

SERIE DI POTENZE

Vedi appunti su sviluppi di Taylor e Mac Laurin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$ serie di potenze centrata in x_0

La serie di potenze è un'estensione della serie geometrica.

<u>RAGGIO DI CONVERGENZA</u>:→

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \end{cases} \rightarrow \text{R(Raggio di Convergenza)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } L=0 \\ \dfrac{1}{L} & \text{se } L \in (0,+\infty) \\ 0 & \text{se } L=\infty \end{cases}$$

<u>Esempio</u>: $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n+2)!+n^3} x^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\dfrac{(n+1)!}{(n+3)!+(n+1)^3}\right|}{\left|\dfrac{n!}{(n+2)!+n^3}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+3)!+(n+1)^3} \frac{(n+2)!+n^3}{n!} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!(n+1)+(n+1)n^3}{(n+2)!(n+3)+(n+1)^3} \sim \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!n}{(n+2)!n} = L = 1 \rightarrow$$

$$L \in (0,+\infty) \rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$$

Esempio: $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)\, x^n$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|n+3|}{|n+2|} = L = 1 \quad \to \quad \mathrm{L} \in (0,+\infty) \quad \to \quad \mathrm{R} = \frac{1}{\mathrm{L}} = 1$$

Esempio: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n^2\, 2^n + 1} (x+2)^n$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{4^{n+1}}{(n+1)^2\, 2^{n+1} + 1}\right|}{\left|\frac{4^n}{n^2\, 2^n + 1}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4^{n+1}\left[n^2\, 2^n + 1\right]}{4^n\left[(n+1)^2\, 2^{n+1} + 1\right]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{4^n} \cdot 4^1 \left[n^2\, 2^n + 1\right]}{\cancel{4^n}\left[\left(n^2 + 2n + 1\right) 2^n \cdot 2^1 + 1\right]}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2\, 2^n}{2n^2\, 2^n} = 2 = L \quad \to \quad \mathrm{L} \in (0,+\infty) \quad \to \quad \mathrm{R} = \frac{1}{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}$$

Sapendo che il raggio è 1/2 e visto che il centro è -2 possiamo dire che il dominio di convergenza è l'intervallo (-2-1/2;-2+1/2) cioè (-5/2;-3/2)

Andiamo a vedere cosa succede negli estremi→

Se $x = -\frac{5}{2}$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n^2\, 2^n + 1} \left(-\frac{5}{2} + 2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n^2\, 2^n + 1} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n^2\, 2^n + 1}$$

essendo $|a_n| \sim \frac{1}{n^2}$ e sapendo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, per il criterio del confronto asintotico anche la nostra serie converge.

Se $x = -\frac{3}{2}$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n^2\, 2^n + 1} \left(-\frac{3}{2} + 2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n^2\, 2^n + 1} \left(+\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2\, 2^n + 1}$$

essendo $|a_n| \sim \frac{1}{n^2}$ e sapendo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, per il criterio del confronto asintotico anche la nostra serie converge.

Pertanto la serie converge in $D = \left[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right]$