SER-T1-001-***Appunti***

VARIE

Si chiama serie l'espressione

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + ...$$

a_n : termine della serie

Carattere di una serie: tale infinita somma di termini può <u>convergere</u> ad un numero finito S (somma della serie), <u>divergere</u> (a ∞,+∞ oppure -∞) oppure essere <u>indeterminata.</u>

Il criterio di Cauchy offre una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di qualsiasi serie. Tale criterio trova però scarse applicazioni. Per stabilire il carattere di una serie si utilizzano in pratica altri criteri.

La maggior parte dei problemi sulle serie richiedono di stabilirne il carattere (Converge? Diverge? E' indeterminata?). Raramente viene richiesto il calcolo della somma S.

<u>CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UNA SERIE</u>

Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché una serie converga:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

<u>Esempi</u>:

$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$ <u>non può convergere</u> in quanto $\lim_{n \to +\infty} 2^n \neq 0$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ <u>diverge</u> pur essendo $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ <u>potrebbe</u> convergere dato che $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

CRITERI DI CONVERGENZA

SERIE A TERMINI POSITIVI

Una serie a termini positivi non può essere indeterminata: diverge o converge.

CRITERIO DEL CONFRONTO→

siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini positivi e sia inoltre

$a_n \le b_n$ (almeno a partire da un certo n convenientemente grande)

Allora se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge

e se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge

Esempio: sapendo già che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge possiamo affermare che anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge in quanto è vero che $\frac{1}{n^2} \ge \frac{1}{n^3}$ a partire già da n=1

Esempio: sapendo già che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge possiamo affermare che anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge in quanto è vero che $\frac{1}{n} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ a partire già da n=1

CRITERIO DEL RAPPORTO (D'ALEMBERT)→

Riportiamo solo il corollario fondamentale: data una serie a termini positivi calcoliamo

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathrm{L}$ → la serie converge se **L<1** e diverge se **L>1**

<u>Esempio</u>: data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\,(n+1)} = 0$$

pertanto la serie converge.

<u>CRITERIO DELLA RADICE→</u>

Riportiamo solo il corollario fondamentale: data una serie a <u>termini positivi</u> calcoliamo

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \mathrm{L}$ → la serie converge se **L<1** e diverge se **L>1**

<u>Esempio</u>: data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + ...$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ pertanto la serie converge.

Nota: se nei due criteri precedenti troviamo L=1 nulla possiamo dire: può divergere o convergere

SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI

Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice <u>assolutamente convergente</u> se converge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$

<u>Una serie assolutamente convergente è anche convergente</u>.

Valgono gli stessi criteri visti per le serie a termini positivi (con qualche formale adattamento)

Esempio: le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+2^n}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$ convergono in quanto le corrispondenti serie "col modulo" convergono in base ai criteri visti precedentemente: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+2^n}$ $\quad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ $\quad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$

(la prima converge per il criterio del confronto confrontandola con la serie convergente $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$, la seconda converge per il criterio del rapporto, la terza converge per il criterio della radice)

<u>Esempio</u>: la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ si dimostra essere convergente ma non è *assolutamente convergente*. Infatti la serie dei moduli è la serie armonica divergente $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$

Un altro criterio per la convergenza assoluta di una serie si ottiene confrontandola con l'integrale improprio di una funzione (assomiglia al criterio del confronto):

se $f(x)$ è una funzione positiva integrabile nell'intervallo $[0;+\infty)$ e se risulta $|a_n|\le f(x)$ per $n\le x\le n+1$ $\quad(n=0,1,2,\ldots)$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ converge assolutamente

SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNATO

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n \quad \text{con} \quad a_n\ge 0$$

<u>CRITERIO DI LEIBNIZ</u>→

Se in una serie a termini di <u>segno alternato</u> risulta $a_{n+1}\le a_n$ e inoltre $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ allora la serie converge.

ALTRO

<u>CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO</u>→

$$\text{se} \quad a_n \sim b_n \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \quad \text{hanno lo stesso carattere}$$

Ovvero se due serie hanno i termini asintotici fra loro devono avere lo stesso carattere (sono entrambe convergenti o entrambe divergenti o entrambe indeterminate). Non è detto che abbiano la stessa somma.

Il criterio è valido anche nel caso di uguale ordine di grandezza (condizione meno restrittiva rispetto all'asintoticità). Si possono pertanto trascurare i fattori costanti.

<u>Esempio</u>: $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3+\sqrt{n}+5} \to a_n \sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{la serie converge}$$

<u>Esempio</u>: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \tan\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \to a_n \sim \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{la serie converge}$$

<u>Esempio</u>: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\log\left(1+\sqrt{n}\right)} \to a_n \sim \frac{1}{n\log\left(\sqrt{n}\right)} = \frac{2}{n\log(n)} \Rightarrow \text{la serie diverge}$$

Serie armonica: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \to \quad \begin{cases} \text{se } \alpha > 1 \ \text{ converge} \\ \text{se } \alpha \le 1 \ \text{ diverge a } +\infty \end{cases}$$

Serie armonica generalizzata: $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha > 1 \ \ \forall \beta \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1 \ \ \beta > 1 \end{cases}$$

Serie telescopica:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(b_k - b_{k+1}\right) = \left(b_0 - b_1\right) + \left(b_1 - b_2\right) + \left(b_2 - b_3\right) + \ldots + \left(b_k - b_{k+1}\right) = b_0 - b_{n+1}$$ il carattere della successione coincide col carattere della successione $\{b_n\}$

Esempio: la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ converge? (serie di Mengoli)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right] = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5}\right) + \ldots\ldots - b_{n+1} = 1 - b_{n+1} = 1$$

In una serie telescopica contano solo il primo e l'ultimo termine della serie. Nel nostro esempio il termine b_{n+1} va a zero pertanto la serie converge e possiamo anche calcolarne la somma: 1

Serie geometrica di ragione q:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \quad \to \quad \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se} \quad -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{se} \quad q \geq 1 \\ \infty & \text{se} \quad q < -1 \\ \text{non esiste} & \text{se} \quad q = -1 \end{cases}$$

In generale se q≠1 risulta $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$