MAT-B1-001-*Testo*

Discutere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y+3x=k \\ z-ky=-3 \\ 2x-z+2y-2=0 \\ ky-x=0 \end{cases}$$

MAT-B1-001-*Procedimento*

Mettiamo in ordine il sistema $\rightarrow$

$$\begin{cases} +3x+1y+0z=k \\ +0x-ky+1z=-3 \\ +2x+2y-1z=2 \\ -1x+ky+0z=0 \end{cases}$$

Scriviamo il sistema in forma matriciale $\rightarrow$ **AX = B**

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

STUDIAMO IL RANGO DELLA MATRICE **A** DEI COEFFICIENTI $\rightarrow$

Cominciamo con l'individuare "ad occhio" almeno una submatrice quadrata di dimensione 1x1 che abbia determinante diverso da zero, ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \text{che ha} \quad \det[3]=3\neq 0$$

Pertanto il rango di **A** è almeno 1: $r(\mathbf{A})\geq 1$ (Questo fatto si verifica SEMPRE se gli elementi non sono tutti nulli!)

Orlando la matrice $\begin{bmatrix}3\end{bmatrix}$ in tutti i modi possibili andiamo a cercare ALMENO una submatrice quadrata 2x2 che abbia determinante diverso da zero: se la troviamo il rango sarà almeno 2 altrimenti il rango resta 1. Ad esempio possiamo individuare "ad occhio" la submatrice formata dagli elementi qui sotto evidenziati:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & ... \\ ... & ... & ... \\ 2 & 2 & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix} \quad \text{che ha} \quad \det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 6 - 2 \neq 0$$

Abbiamo quindi individuato almeno una submatrice quadrata di dimensione 2x2 che ha determinante diverso da zero: pertanto il rango di **A** è almeno 2: $\mathrm{r}(\mathbf{A}) \geq 2$

Orlando la matrice $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ in tutti i modi possibili andiamo a cercare almeno una submatrice quadrata 3x3 che abbia determinante diverso da zero: se la troviamo il rango sarà 3 (non possiamo andare oltre al 3 in quanto submatrici 4x4 non ci stanno!) altrimenti il rango resta 2. Abbiamo solo due possibili submatrici formate dagli elementi qui sotto evidenziati:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ ... & ... & ... \end{bmatrix} \quad \text{che ha} \quad \det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = 3k - 4 \quad \text{ed esso si annulla se } k = \frac{4}{3}$$

oppure

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ ... & ... & ... \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & k & 0 \end{bmatrix} \quad \text{che ha} \quad \det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & k & 0 \end{bmatrix} = 1 + 3k \quad \text{ed esso si annulla se } k = -\frac{1}{3}$$

Non potendo essere contemporaneamente $k = \frac{4}{3}$ e $k = -\frac{1}{3}$ segue che almeno una delle due possibili submatrici 3x3 sopra indicate avrà determinante diverso da zero.

Pertanto all'interno di **A** ci sarà sempre almeno una submatrice 3x3 con determinante non nullo:

IN DEFINITIVA IL RANGO DELLA MATRICE **A** E' SEMPRE **3** QUALSIASI SIA *k*:

$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 3 \quad \forall k$

STUDIAMO IL RANGO DELLA MATRICE $\mathbf{A}|\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & k \\ 0 & -k & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & k & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sappiamo che la submatrice $\mathbf{A}$ dei coefficienti contenuta nella matrice $\mathbf{A}|\mathbf{B}$ ha rango 3 qualunque sia k, pertanto la matrice $\mathbf{A}|\mathbf{B}$ ha almeno rango 3: $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) \geq 3$.

Vediamo se ha rango 4:

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & k \\ 0 & -k & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & k & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= +1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ -k & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 3 & 0 & k \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 3 & 1 & k \\ 0 & -k & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= +1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ -k & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 3 & 0 & k \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = (2 + k^2 - 3 - 2k) + k(6 - 9 - 2k) =$$

$$-1 + k^2 - 2k - 3k - 2k^2 = -k^2 - 5k - 1$$

$$-k^2 - 5k - 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad k_{1;2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-4}}{-2} = \begin{cases} k_1 = \dfrac{5+\sqrt{21}}{-2} \\ k_2 = \dfrac{5-\sqrt{21}}{-2} \end{cases}$$

Per questi due valori di k la matrice $\mathbf{A}|\mathbf{B}$ ha determinante nullo pertanto il rango non è 4 ma resta 3: $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 3$.

Se invece k è diverso dai due valori sopra indicati la matrice $\mathbf{A}|\mathbf{B}$ di dimensione 4x4 ha determinante diverso da zero e quindi ha rango 4: $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 4$

Il teorema ROUCHE-CAPELLI ci dice che se r(**A|B**)=r(**A**) allora il sistema è possibile e se r(**A|B**)≠r(**A**) allora il sistema è impossibile.
Inoltre se il sistema è possibile esso è determinato se r(**A**)=**n** dove n è il numero delle incognite ed è indeterminato se r(**A**)<**n** con **n**-r(**A**) gradi di libertà.

Conclusione:

MAT-B1-001-***Soluzione***

SE $\quad k \neq \frac{5+\sqrt{21}}{-2} \wedge k \neq \frac{5-\sqrt{21}}{-2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 4 \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{r}(\mathbf{A}) = 3 \quad \Rightarrow$ sistema impossibile

SE $\quad k = \frac{5+\sqrt{21}}{-2} \vee k = \frac{5-\sqrt{21}}{-2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 3 \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{r}(\mathbf{A}) = 3 \quad \Rightarrow$ sistema possibile

in questo caso essendo n=3=r(**A**) $\Rightarrow$ sistema determinato