IND-A1-001-***Testo***

Dimostrare per induzione che

Se $q \neq 1$ risulta $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

IND-A1-001-***Soluzione***

Assunto come vero l'asserto $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ dimostriamo che

anche $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$ è vero:

DIMOSTRAZIONE→

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = q^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} q^k = q^{n+1} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}\left(1-q\right)+1-q^{n+1}}{1-q} =$$

$$\frac{\cancel{q^{n+1}} - q^{n+2} + 1 \cancel{-q^{n+1}}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

Abbiamo dimostrato che se l'asserto è vero per un certo n lo è anche per $n+1$

Verifichiamo che l'asserto è vero se $n=0$:

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$$

Pertanto una volta verificato direttamente che per $n=0$ l'asserto è vero, la dimostrazione per induzione ci assicura che l'asserto sarà vero anche per $n=1$ e poi essendo vero per $n=1$ lo sarà anche per $n=2$ e poi essendo vero per $n=2$ lo sarà anche per $n=3$ e via dicendo per qualsiasi n.